COMPENDIO
DI
MATEMATICHE

À portata di ciaſcuno, ad uſo de' Collegi e Conviti e de' Giovani Officiali : Opera deſtinata alla iſtruzione de' Giovanetti ; e di coloro cui mancando il ſoccorſo di un Maeſtro di Matematiche , bramano iniziarſi in queſta ſcienza in poco tempo e ſenza grande difficoltà. Trovaſi qui l Algebra, la Geometria, un Trattato di Geometria pratica ; la Livellazione ; un trattatello delle Curve , e quanto è meſtieri per intendere la Geografia ; le Fortificazioni del Sig. le Blond ; l'Ingegnero Franceſe , ec.

CON FIGURE

DEL SIGNOR

ABATE SAURI

Anziano Profeſſore di Filoſofia nell'Univerſità di Mompellier , e Corriſpondente dell' Accademia Reale delle Scienze della Città medeſima .

EDIZIONE PRIMA VENETA

TRATTA DALL'ULTIMA FRANCESE RIVEDUTA E CORRETTA DALL'AUTORE.

IN VENEZIA , MDCCLXXXI.
APPRESSO SIMONE OCCHI.
Con Licenza de' Superiori , e Privilegio .

L' EDITORE

A' LEGGITORI.

DOpo la pubblicazione da me fatta del Corſo di Filoſofia del Sig. Ab. Sauri in lingua Italiana, le frequenti iſtanze che mi ſi facevano dai Dotti perchè pubblicaſſi ancora il Compendio, o le Iſtituzioni di Matematiche dello ſteſſo Autore, onde rimaneſſe così completo il Corſo ſuddetto, mi determinarono a dare ancor quello alla luce. Trovai però aſſai difficile il rinvenirne in Italia una copia, quale era indicata dal Sauri, munita cioè del certificato ſcritto di pugno dell' Autore medeſimo, il quale volle con queſta nota contraddiſtinguere la ſua edizione dalle altre da lui non riconoſciute, ma anzi rigettate ed adulterine. Perciò mi fu neceſſario laſciar correre alcun tempo, finchè mi pervenne la copia

genuina ed autentica: Non tardai allora di procurarmene sollecitamente la traduzione, e m'accinsi a pubblicarla colle stampe, non risparmiando a chè che sia perchè ne fosse esatta la correzione; sapendo essere questo il primo articolo ricercato ne' libri di questa fatta: Ho preferito di far tradurre piuttosto il Compendio che le Istituzioni per secondar in tal maniera all'Autore, che lo vuole premesso alla sua Fisica, ed insieme perchè a me servisse di saggio onde riconoscere il sentimento de' Dotti i quali collo spaccio che spero mi procureranno di questo, siccome fecero del Corso sopraddetto, mi determineranno a dare finalmente alla luce ancora le Istituzioni.

AVVERTIMENTO.

A Commodo di quelli che volessero sapere tanto solamente delle Matematiche quanto basta per imparare la Geografia, ed intendere i Libri che trattano di Fortificazioni ec. abbiamo, come ha fatto l'Autore, contraddistinto con un asterisco li paragrafi che possono omettere.

In quanto poi alli numeri rinchiusi tra parentesi come (10) nella pag. 21 lin. 4, s'intende che la ragione di ciò ch'è detto in tal luogo si ritrova al num. 10; il numero (11) nella pag. medesima lin. 16 indica che il metodo da seguirsi per far l'operazione è sviluppato al num. 11, ec.

NOI

NOI RIFORMATORI

Dello Studio di Padova.

AVendo veduto per la Fede di Revisione, ed Approvazione del P. F. Gio: Tommaso Mascheroni Inquisitor General del Sant' Officio di Venezia nel Libro intitolato *Compendio delle Matematiche ec. del Sig. Abate Sauri ec.* MS. non v' esser cosa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimenti per Atteſtato del Segretario Noſtro niente contro Principi, e buoni coſtumi: concediamo Licenza a *Simone Otchi Stampatore di Venezia*, che poſſa eſſere ſtampato; oſſervando gl' ordini in materia di Stampe, e preſentando le ſolite Copie alle Pubbliche Librerie di Venezia, e di Padova.

Dat. li 22. Maggio 1781.

(Andrea Querini Riſ.

(Alviſe Vallareſſo Riſ.

(Girolamo Aſcanio Giuſtinian Kav. Riſ.

Regiſtrato in Libro a carte 9. al num. 67.

Davidde Marcheſini Seg.

COM-

COMPENDIO
DI
MATEMATICHE.

1. LE *Matematiche* ſono la ſcienza della grandezza. La *grandezza* o la *quantità* è una coſa ſuſcettibile di accreſcimento o di diminuzione. Perciò li numeri ſono grandezze, perchè poſſiamo accreſcerli o diminuirli. Il numero *cinque* diverrà maggiore ſe a lui ſi aggiunga il numero *tre*; ma diverrà minore ſe da eſſo ſi levi via il numero *due*. Il moto, l'eſtenſione ec. debbono eſſer meſſi nella claſſe delle grandezze, perchè ſono coſe ſuſcettibili di accreſcimento o di diminuzione.

Nella numerazione attuale, facciamo uſo di dieci caratteri venutici dagli Arabi, e che nominiamo cifre, cioè uno (1), due (2), tre (3), quattro (4), cinque (5), ſei (6), ſette (7), otto (8), nove (9), zero (0). Lo 0 ſolo non ſignifica niente; ma meſſo a deſtra di una cifra rende il valor di eſſa dieci volte più grande. Perciò 1 non vale che uno; ma 10 vagliono dieci. Parimente 5 vale cinque unità; ma 50 ne vagliono cinquanta. Nella numerazione attuale il valore delle cifre va creſcendo da deſtra a ſiniſtra in proporzione decupla; l'unità cioè di una cifra più a ſini-

ſtra vale dieci volte di più che ſe ella foſſe in un luogo più verſo la deſtra. Quindi nel numero 3, 521, 706, oſſia tre milioni, cinquecento vent'un mille, settecento ſei, la prima cifra vale ſei unità, la ſeconda cifra o tiene luogo di decine che mancano, la cifra 7 vale ſette centinaja, la cifra 1 vale mille: ora mille vale dieci volte cento; la cifra 2 vale venti mila, la cifra 5 vale cinque cento mila, e la cifra 3 vale tre milioni; ma un milione vale dieci volte cento mila, un bilione vale cento milioni, un trilione vale cento bilioni, ec.

Dell' Addizione.

2. Per aggiungere molti numeri inſieme, ſi ſcrivono gli uni ſotto degli altri, ſicchè le unità corriſpondano alle unità, le decine alle decine, le centinaja alle centinaja ec. e cominciando poſcia l'operazione da deſtra, ſi prende la ſomma di tutte le colonne, e ſcriveſi la ſomma di ſotto. Se cotal ſomma non poteſſe eſſere eſpreſſa che con due cifre, ſi ſcrive quella ch'è a deſtra riſerbando quella a ſiniſtra per aggiungerla alla ſomma della ſeguente colonna.

ESEMPIO. Si domanda di aggiungere inſieme li numeri che qui veggonſi gli uni ſotto degli altri.

Poichè coteſti numeri ſono diſpoſti come è richieſto dalla regola, dico 5 e 2 fanno 7, che ſcrivo ſotto la prima colonna. Paſſando poſcia alla colonna ſe-

3030
172
7775
10977

guen-

guente ch' è quella delle decine, dico 7 e 7 fanno 14, e 3 fanno 17; scrivo la cifra 7 sotto la colonna, e ritengo la cifra 1 per aggiungerla ad 8 somma della colonna delle centinaja, lo che mi dà 9 che scrivo sotto tal colonna; la colonna delle migliaja dà 10: scrivo dunque o sotto questa colonna e metto fuori 1; talchè la somma è 10977.

* Sia proposto di aggiungere numeri complessi, cioè numeri contenenti grandezze di diverse specie, come lire, soldi, danari. Bisogna scrivere le unità della stessa natura le une sotto delle altre, val a dire, li danari p. e. sotto li danari, li soldi sotto li soldi ec. Poscia si prenda la somma delle specie più picciole, e veggasi se in tal somma sono contenute una o più unità della specie seguente; in tal caso si riterrà la unità o le unità per farne una somma sola col numero che dà la somma delle unità della seguente grandezza. Lo stesso pure dovrà farsi per li soldi rispetto alle lire. Così per aggiunger insieme li numeri qui sotto, io prendo la somma de' danari, la quale essendo 17 (prendonsi li 10 danari in una volta) vale 5 danari e 12 danari, un soldo cioè e 5 danari, perciò scrivendo 5 sotto li danari, ritengo un soldo per aggiungerlo alla somma della colonna seguente. Dico adunque un soldo di riserbato e o e 18 fanno 19 e 3 fanno 22, che vagliono 2 soldi ed una lira; quindi scrivo 2

352 *l.*	3 *s.*	5 *d.*
872	18	10
3	0	2
1228 *l.*	2 *s.*	5 *d.*

sotto li soldi e tengo 1 da aggiungere alle lire. Dico adunque 1 di riserbato e 3 fanno 4 e 2 fanno 6 e 2 fanno 8, il quale scrivo sotto le unità di lira; passo dopo alla colonna seguente la cui somma è 12; perciò scrivo 2 sotto cotesta colonna e ritengo uno per la colonna seguente che così varrà 12; quindi scrivo 2 sotto le centinaja di lire, ed 1 nel sito delle migliaja; talchè la somma sarà 1228 lire 2 soldi 5 danari. Lo stesso dovrà farsi pure qualor si trattasse di aggiungere insieme tese, piedi e pollici; basta sol ricordarsi che la tesa vale 6 piedi, ed il piè 12 pollici.

* OSSERVAZIONE. Possiamo, operando su i danari o su i soldi pigliare in una volta la somma delle decine e delle unità, senza obbligarci a far passaggio dalle unità alle decine.

* Per far la prova dell'Addizione basta ripigliarla da su in giù, se prima si ha operato andando da giù in su, o reciprocamente; perchè trovandosi in ambedue queste maniere il medesimo risultato non è verosimile che sia corso errore.

Della Sottrazione.

3. Per sottrarre un numero da un altro, scrivasi in guisa il più piccolo sotto del più grande, che le unità, le decine, le centinaja ec. dell'uno corrispondano alle unità, decine, e centinaja ec. dell'altro; poscia si levi via andando da destra a sinistra ciascuna cifra del numero inferiore da quella del numero supe-

riore che le corrifponde, e qualora una tal fottrazione non fia poffibile, aggiungafi col penfiero una decina al numero fuperiore; ma in feguito fi aggiunga una unità alla cifra che vien dopo del numero inferiore. Quefta unità aggiunta in un fito più indietro verfo la finiftra vale appunto la decina aggiunta al numero fuperiore; quindi è lo fteffo come fe fi aveffe aggiunto il numero medefimo tanto in una parte che nell'altra, e allora il rifultato verrà ad effer lo fteffo come fe nulla non fi aveffe aggiunto. Per efempio fe voglio fottrarre 3 da 5, troverò 2 per rifultato, o per la differenza tra 5 e 3; ma fe pria di fare la fottrazione aggiungo 10 a 3, ed a 5 per fottrar pofcia 13 da 15, la differenza farà fempre 2.

Esempio. Propofto venga di fottrarre il numero 715 da 1206. Difpofti li numeri come ora fi è detto, levo via 5 da *6* e fcrivo il refto 1 fotto la colonna delle unità; levar poi via 1 da 0 non fi può, perciò aggiungo 10 a 0, da cui levando via 1 refta 9 che fcrivo nel fito delle decine. Appreffo mi ricordo di dover aggiungere 1 (offia un centinajo) a 7, lo che fa 8 il quale non è poffibile levarfi via da 2; quindi aggiungo 10 a 2 che mi dà 12, da cui levando via 8 rimane 4 che fcrivo al luogo delle centinaja. Comechè ora ho aggiunto 10 al numero fuperiore, aggiungo 1 (col penfiero folamente) al numero inferiore, e levando via 1 dal numero fuperiore, il refiduo è nulla. Non ifcrivo poi 0, percioechè non havvi cifra al-

$$\begin{array}{r} 1206 \\ 715 \\ \hline 491 \end{array}$$

cuna più a finistra cui lo o possa aumentare il valore.

* Se li numeri sono complessi, si dee scrivere le unità della stessa specie le une sotto le altre, e sottrarre procedendo da destra a sinistra, ciascuna cifra del numero inferiore dalla sua corrispondente nel superiore. Se succedesse che il numero de' danari p. e. nel numero inferiore fosse maggiore che il suo corrispondente, si dovrà aggiungere al numero corrispondente un soldo ridotto in danari, cioè 12 danari; ma sarà necessario l'aggiunger dopo 1 a' soldi del numero inferiore, affinchè siavi sempre la stessa differenza. Se si dovesse aggiungere ai soldi del numero superiore, vi si aggiungeranno 20 soldi, val a dire una lira ridotta in soldi, e dopo aggiungere una lira alle lire del numero inferiore. Se si trattasse di pollici, piedi, tese, si dovrà operare come nel esempio seguente.

* ESEMPIO. Sia proposto di sottrarre 25 tese 3 piedi 10 pollici da 368 tese 2 piedi 8 pollici. Disposto avendo li numeri, come qui può vedersi, dico 10 da 8 non si può; perciò aggiungo un piede ossia 12 pollici ad 8, il che mi dà 20, da cui sottraendo 10, resta 10, che scrivo sotto li pollici. Aggiungo poscia un piede al numero inferiore per aver 4 piedi che non possono esser levati via da 2; perciò aggiungo una tesa ossia 6 piedi al numero superiore, il che mi dà 8,

368 tese	2 piedi	8 pollici
25	3	10
342	4	10
368 tese	2 piedi	8 pollici

da

da cui togliendo via 4, mi resta 4, che scrivo sotto li piedi. Comechè ho aggiunto una tesa al numero superiore, debbo aggiungerne un' altra all' inferiore; dico adunque 5 ed 1 fanno 6, che sotratti da 8, resta 2 che scrivo sotto le tese; levo via poscia 2 da 6 e metto 4 a fianco del 2, e finalmente levando via nulla ossia o da 3, resta 3, che scrivo anch' esso alla differenza, la quale è 342 tese, 4 piedi, 10 pollici.

* Per farne la prova, si sommerà il minor numero colla differenza, e si avrà, com' è evidente, il maggiore, quando sia giusta l'operazione. Facciasene la prova sull' ultimo esempio.

Della Moltiplicazione.

4. La *Moltiplicazione* è un' operazione mediante la quale si prende tante volte un numero detto *moltiplicando* quante è segnato da un altro che *moltiplicatore* s' appella. Il risultato da questa operazione si chiama *Prodotto*. Quindi a moltiplicar 4 per 3, dirò 3 volte 4 fanno 12; 4 è il moltiplicando, 3 il moltiplicatore, e 12 il prodotto. Giova assai di saper a memoria li prodotti di tutti li numeri a due a due, dall' 1 fino al 9 inclusivamente. Cotali prodotti compresi sono nella tavola seguente.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

L'uso di questa tavola è facile. Supponghiamo che si desideri sapere quanto fanno 7 volte 6; cercate la casella che risponde al 7 nel primo ordine orizzontale superiore (che va da sinistra a destra) ed al 6 nel primo ordine verticale (che procede da su in giù), o reciprocamente, il numero 42 di tal casella sarà il prodotto cercato, e così degli altri.

5. Allorchè il moltiplicando contenga parecchie cifre, si moltiplica, andando da destra a sinistra, ciascuna cifra del moltiplicando per quella che serve di moltiplicatore; ma se vi fossero molte cifre nel moltiplicatore, si dovrà moltiplicare il moltiplicando per ciascheduna delle sue cifre, ricordandosi di metter la prima cifra del prodotto sotto la cifra del moltiplicatore che l'ha data. Allorchè non possa essere espresso il prodotto che da due cifre, si scriva quella ch'è a destra, e ritengasi qu a della sinistra per aggiungerla al prodotto seguente.

Sia

Sia proposto, p. e., di moltiplicare 302 per 25. Avendo scritto il moltiplicatore di sotto del moltiplicando, come qui lo vedete, moltiplico la prima cifra 2 del moltiplicando per 5; il prodotto 10 non potendo essere espresso che con due cifre, scrivo 0 (ch' è quella della destra) nel sito delle unità, e ritengo 1; dico poscia 5 volte 0 danno 0 ed 1 di ritenuto fanno 1 che scrivo nel sito delle decine. Ciò fatto, moltiplicando 3 per 5, ho 15, scrivo 5 nel sito delle centinaja, e porto 1 nel sito delle migliaja. Laonde se il moltiplicatore non contenesse che una sola cifra 5, la operazione sarebbe finita, ed il prodotto sarebbe 1510; ma siccome il moltiplicatore contiene anche la cifra 2, moltiplico di nuovo la prima cifra 2 del moltiplicando per la cifra 2 del moltiplicatore, cifra che dinota le decine; perciò scrivo il prodotto 4 nel sito delle decine. Appresso moltiplico 0 per 2 e scrivo il prodotto 0 al sito seguente, e moltiplicando 3 per 2 scrivo *6* nel luogo seguente, sommando in seguito li prodotti nella posizione ove si trovano. Dico 0 fa 0 che io scrivo, poi 4 ed 1 fanno 5, che scrivo come si vede, dopo 0 e 5 fanno 5, che scrivo al sito delle centinaja; finalmente *6* ed 1 fanno 7 che scrivo nel sito delle migliaja: e il prodotto ricercato è 7550.

$$\begin{array}{r} 302 \\ 25 \\ \hline 1510 \\ 604 \\ \hline 7550 \end{array}$$

Si domanda quanto costeranno 52 montoni a 12 lire il montone. Moltiplico 12 lire ossia

li

il prezzo del montone per 52, numero de' montoni; il prodotto 624 mi fa conoscere che li 52 montoni costeranno 624 lire, supposto che ogni montone si venda 12 lire.

52	12
12	52
104	24
52	60
624	624

Siccome puossi in certi casi compendiare la moltiplicazione, giova farne conoscere alcuni. Se si avrà da moltiplicare per 1 seguito da uno o più o, basterà scrivere un dopo l' altro al moltiplicando tanti o quanti ne sono nel moltiplicatore: p. e. per moltiplicare 25 per 100, scrivo 2500, lo che evidentemente torna allo stesso, perchè moltiplicare 25 per 100 è prendere cento volte il moltiplicando, ossia è un render il moltiplicando cento volte maggiore. Ma aggiungendo due o, si fa divenire il moltiplicando cento volte maggiore, perciocchè le sue unità diventano centinaja, e le decine diventano migliaja; dunque ec. Se si dovesse moltiplicare 25 per un numero qualunque, seguito da uno o più o, si moltiplicherà come all' ordinario senza aver riguardo alli o, si aggiungerà dopo al prodotto tanti o, quanti ne erano nel moltiplicatore; perciò se il moltiplicatore fosse 300, moltiplicherassi 25 per 3, il cui prodotto è 75, a lato del quale scrivendo oo, avrò il prodotto totale 7500. E di fatti il prodotto di 25 per 300 dev' essere triplo del prodotto di 25 per 100; ora 7500 è triplo di 2500.

Se fossevi degli o, tanto alla fine del moltiplicando quanto del moltiplicatore; p. e. se si do-

si dovesse moltiplicare 250 per 300, si moltiplicherà 25 per 3, ed aggiungerassi al prodotto 75 tanti 0, quanti ne sono così nel moltiplicando come nel moltiplicatore, ed il prodotto cercato sarà 75000.

Serve la moltiplicazione a ridurre le specie grandi in picciole, p. e. le tese in piedi, li piedi in pollici; le lire in soldi, li soldi in danari. Ciò si ottiene col moltiplicare il numero delle specie maggiori pel numero che indica quante volte la maggiore contenga la minore. Così per sapere quanti piedi formino 8 tese, moltiplico 8 per *6*, perchè la tesa vale *6* piedi; il prodotto 48 mi fa vedere che le 8 tese vagliono 48 piedi.

Per fare la prova della moltiplicazione, prenderassi per moltiplicando il numero che prima ha servito di moltiplicatore, e reciprocamente; perciocchè è chiaro dovere il risultato essere lo stesso, perchè 5 volte 3 sono lo stesso che 3 volte 5.

Della Divisione.

6. La *Divisione* è un' operazione per via della quale si cerca quante volte un numero chiamato *Dividendo* contenga un altro numero che dicesi *Divisore*: il risultato da cotesta operazione si nomina *Quoziente*. Per dividere p. e. 12 per 3, dico quante volte stà il 3 nel 12, vi stà 4 volte: 12 è il dividendo, 3 il divisore e 4 il quoziente. Ognun vede che moltiplicando il divisore pel quozien-

ziente, deesi trovare il dividendo. Così moltiplicando 3 per 4 si trova il dividendo 12: Ciò ha luogo tutte le volte che il quoziente è senza resto. Ma se v'ha un resto, bisogna aggiungere tal resto al prodotto del divisore pel quoziente, e la somma dev'essere eguale al dividendo allorchè l'operazione è giusta. Se avrò a dividere 23 per 5, dirò quante volte stà il 5 in 23, vi stà 4 volte, moltiplicando il divisore 5 pel quoziente 4, troverò 20 che sottrarrò da 23, ed avrò il resto 3, questo resto aggiunto che sia al prodotto del divisore pel quoziente, darà il dividendo 23; nel che consiste la prova della divisione.

Se il dividendo contiene molte cifre, e il divisore ne contenga una sola, si scriverà il divisore alla destra del dividendo, separando l'uno dall'altro per via di una linea, e dopo tirata ancora una linea sotto ambidue, si cercherà procedendo da sinistra a destra, quante volte ciascun membro di divisione contenga il divisore. Ora il primo membro di divisione sarà composto di una sola cifra, se tal cifra può contenere il divisore, se no prenderannosene due; ma ciascuna delle altre cifre aggiunta al resto (se ve n'ha) formerà un membro di divisione. Dovrassi ogni volta moltiplicare il divisore pel quoziente, levar via il prodotto del membro di divisione corrispondente, e prender per membro seguente di divisione il resto del precedente (se ve n'ha) unito alla cifra seguente.

ESEMPIO I. Si domanda di dividere 624 per

per *6*. Avendo scritto il divisore a lato del dividendo, come qui si vede, prendo la prima cifra *6* del dividendo per primo membro di divisione, perchè questa cifra *6* contiene il divisore, e dico quante volte stà il *6* in *6*, vi stà una volta; perciò scrivo 1 al quoziente, e moltiplicando il divisore *6* pel quoziente 1 scrivo il prodotto sotto il membro di divisione corrispondente, e levando via *6* da *6*, resta nulla ossia 0. A lato di nulla calo la cifra seguente 2, e perchè 2 non contiene *6* scrivo 0 al quoziente; abbasso la cifra 4 a fianco di 2, ed ho 24 per terzo membro di divisione; dico adunque quante volte stà il *6* in 24, vi stà 4 volte, perciò scrivo 4 al quoziente, e moltiplicando il divisore *6* pel quoziente 4, scrivo il prodotto 24 sotto il terzo membro di divisione, (possiamo chiamare un membro di divisione un *Dividendo parziale*) e facendo la sottrazione non resta nulla. Di tal modo il quoziente intero è 104. E in fatti col moltiplicare 104 per *6* si troverà il dividendo *624*.

624	6
6	104
024	
24	
00	

ESEMPIO II. Vien proposto a dividere 254 per 4. Avendo scritto il divisore a fianco del dividendo conforme il solito, e la prima cifra 2 del dividendo non contenendo punto il divisore, prendo 25 per primo membro di divisione; e perchè 25 contiene *6* volte il di-

254	4
24	63 (2)
14	
12	
2	

vi-

visor 4, scrivo 6 al quoziente. Moltiplicando il divisore pel quoziente, o il quoziente pel divisore (perchè il risultato è sempre lo stesso) scrivo il prodotto 24 sotto il dividendo parziale 25; levando dunque 24 da 25 resta 1. A lato scrivo la cifra seguente 4 del dividendo, e divido 14 per 4; il quoziente sarà 3, moltiplicando poi il divisore pel quoziente 3 e togliendo via il prodotto 12 dal dividendo parziale 14, resta 2, che scrivo a lato del quoziente tra due parentesi. Di questa maniera il quoziente è 63, e v' ha 2 di resto. Di fatto moltiplicando il divisore pel quoziente troveremo 252, ed aggiungendo il resto 2 a tale prodotto, avremo il dividendo 254.

7. Se il dividendo e il divisore contengono ciascuno parecchie cifre, si prenderà per primo membro di divisione tante cifre nè più nè meno quante sono necessarie per contenere il divisore; si cercherà poscia quante volte la prima cifra del divisore è contenuta nella prima cifra del membro di divisione su cui si fa l'operazione, purchè tal membro di divisione non contenga punto più cifre che il divisore; ma se ne contenesse una di più, cercherassi quante volte la prima cifra del divisore è contenuta nelle due prime del membro corrispondente. Per assicurarsi che la cifra trovata è buona, si moltiplicherà il divisore intero pel quoziente, e se il prodotto è contenuto nel membro di divisione corrispondente, la cifra trovata dev' esser posta al quoziente; se no,

deesi

deesi diminuire il quoziente di una unità, finchè tal prodotto sia contenuto nel dividendo parziale corrispondente. Si metterà anche o al quoziente qualor la cifra 1 fosse troppo grande. Se dopo aver sottratto dal dividendo parziale il prodotto del divisore pel quoziente si trovasse il resto eguale o maggiore del divisore, saria segno essere troppo piccola la cifra scritta al quoziente, perciò dovrebbesi accrescerla.

Esempio I. Venga proposto di dividere 3600 per 60. Avendo scritto il divisore a lato del dividendo conforme il solito, prendo per primo membro di divisione le tre prime cifre del dividendo, perchè le due prime non contengono il divisore. Dico poscia quante volte stà nel 36 (che sono le due prime cifre del dividendo parziale 360) la prima cifra 6 del divisore; vi stà 6 volte. Per assicurarmi che il 6 è buono, bisogna

3600	60
360	60
0000	

che moltiplicando il divisore 60 pel quoziente 6 il prodotto 360 esser possa sottratto dal dividendo parziale 360; ma così è veramente, quindi scrivo 6 al quoziente, e facendo l' anzidetta sottrazione, resta 000. A lato di 000 abbasso la cifra seguente 0, ed ho 0000 per dividendo parziale. Un tale dividendo poi non contenendo punto il divisore 60, scrivo 0 al quoziente ch'è 60. In fatti col moltiplicare il divisore 60 pel quoziente 60 trovasi il dividendo 3600.

Esempio II. Sia ancora proposto da dividere 1227 per 12. Avendo scritto il divisore a lato

lato del dividendo conforme il solito, prendo 12 per primo dividendo parziale, e dico, quante volte la prima cifra 1 del divisore stà nella prima cifra 1 del dividendo; ci stà una volta, perciò scrivo 1 al quoziente. Moltiplico in appresso il divisore 12 pel quoziente 1, scrivo il prodotto 12 sotto il primo membro di divisione, faccio la sottrazione, e scrivo la cifra seguente 2 del dividendo a lato del resto o (possiamo riguardar o come un resto) e perchè 2 non contiene il divisor 12 del quoziente, scrivo o al quoziente. A lato di 2 abbasso l'ultima cifra 7 del dividendo, ed ho 27 per terzo dividendo parziale; dico dunque, quante volte stà 1 (prima cifra del divisore) in 2 (prima cifra del dividendo), e trovo starvi due volte. Diffatti moltiplicando 2 per 12 il prodotto 24 può esser sottratto da 27, e perchè v'è 3 di resto, scrivo questo resto a lato del quoziente, come si vede. Se moltiplicherete 102 per 12 aggiungendo 3 al prodotto, troverete il dividendo, e così l'operazione sarà esatta.

1227	12
12	102 (3)
027	
24	
3	

ESEMPIO III. Quanti soldi vi sono in 1237 danari? Poichè il soldo vale 12 danari, egli è chiaro avervi 12 volte meno di soldi che di danari; perciò convien dividere il numero de' danari per 12: il quoziente 103 col resto 1, faran sapere che 1237 danari vagliono 103 soldi e un danaro.

ESEM-

ESEMPIO IV. Quante lire vi sono in 352 soldi? Valendo la lira 20 soldi, deesi dividere il numero de'soldi per 20, il quoziente 17 e il resto 12 vi diranno che 352 soldi vagliono 17 lire, 12 soldi.

Per ridurre le minori specie in maggiori, p. e. li soldi in lire, si farà uso della divisione, e dividerassi il numero delle minori specie per quello che indica quante volte la maggiore contenga la minore; così per sapere quante tese vagliano 45 piedi, divido 45 per 6; il quoziente 7 ed il resto 3 mi fan vedere che 45 piedi vagliono 7 tese e 3 piedi.

Se si trova alla fine del dividendo un certo numero di o, ed il divisor fosse 1 seguito da zeri, si cancelleranno altrettanti o in fine del dividendo, quanti ne saranno al divisore. Quindi per dividere 22000 per 100, scriverete 220, perchè così operando torrete via la centesima parte del dividendo; val a dire, renderete il dividendo 100 volte più piccolo. Se doveste dividere 3230 per 1000, poichè il divisore contiene più o del dividendo, farete la divisione conforme al solito; oppure dopo cancellato uno o al dividendo, ed uno al divisore, dividerete 323 per 100.

8. Prima di passare più avanti, darò qui la spiegazione di alcuni segni, e termini usitatissimi presso li Matematici. Il segno + indica l'addizione; così 3 + 5 indica la somma di 3 e di 5; questo segno si nomina *più*; di modo che 3 + 5, o 3 *più* 5 fanno 8. Il segno — chiamasi *meno*; esso dinota la sottrazione;

così $5-2$, o 5 *meno* 2 vagliono 3. Il ſegno $=$ o il ſegno *di uguaglianza* indica che due quantità ſono uguali: così $3+5=8$, dinota l'uguaglianza tra $3+5$ ed 8. Il ſegno $\times$ indica la moltiplicazione: così $3\times 5=15$ dinota che 3 moltiplicato eſſendo per 5 dà un prodotto 15. Il ſegno $<$ o $>$ ſignifica *maggiore* o *minore*; così $5<7$, $6>3$, ſignificano 5 eſſer minore di 7, e 6 maggiore di 3. Brevemente, la quantità minore trovaſi ſempre dalla parte della punta, e la maggiore dalla parte dell'apertura del ſegno. *Teorema* ſi dice una propoſizione della quale ſi dee dimoſtrare la verità. *Corollario* è una propoſizione che ſegue da un'altra. *Problema* poi è una propoſizione che inſegna a fare qualche coſa.

Delle Frazioni.

9. La *Frazione* non è altro che una o più parti dell'unità. Si adoprano due numeri per indicare una frazione, l'uno chiamaſi *denominatore*, eſſo indica la qualità delle parti dell' unità, ſe ſieno terze, p. e., quinte, ſeſte ec.; diceſi l'altro *numeratore*, e fa queſto conoſcere il numero di parti dell'unità che ſi prende. Il denominatore ſi ſcrive ſotto al numeratore, ſeparando con una linea l' uno dall' altro. Così per indicare tre quinti d'un' unità, ſcriverò $\frac{3}{5}$: ſe l' unità di cui ſi tratta ſarà una lira, poichè il quinto d'una lira vale 4

le 4 soldi, li tre quinti varranno 12 soldi; quindi questa frazione $\frac{3}{5}$ di lira è = 12 soldi. Chiaro è indicarsi dalla frazione una divisione, in cui il numeratore è il dividendo, e il denominatore il divisore, di modo che li $\frac{3}{5}$ d'una lira sono lo stesso che la quinta parte di 3 lire. Diffatti la quinta parte di 3 lire, ossia di 60 soldi (che vale 12 soldi) è tre volte maggiore che la quinta parte d'una sola lira; essa val dunque tre quinti o $\frac{3}{5}$ d'una lira.

10. Una frazione $\frac{3}{5}$ p. e. resta dello stesso valore se si moltiplicano li suoi due termini per uno stesso numero 2 p. e.; lo che dà $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$: in fatti un decimo vale due volte meno che un quinto; vi vogliono adunque due volte più di decimi che di quinti per valere lo stesso. Ciò è eziandio manifesto trattandosi d'una frazione di lira, perchè $\frac{1}{10}$ d'una lira è 2 soldi, e $\frac{6}{10}$ di lira vagliono 12 soldi egualmente che $\frac{3}{5}$ di lira. Parimente una frazione non cangia punto di valore, allorchè sono divisi li suoi due termini pel numero medesimo. Se dividete il numeratore e il denominatore della frazione $\frac{6}{10}$ per 2, avrete la frazione $\frac{3}{5}$ che vale quanto la frazione $\frac{6}{10}$.

Qualor dopo una divisione abbiavi un resto, deesi divider tal resto pel divisore onde avere una frazione, la quale aggiunta poscia al quoziente trovato, darà il vero quoziente totale; quindi se avrò a dividere 22 per 5, dirò quante volte il 5 in 22; vi sta 4 volte; ma 4 volte 5 fanno 20, che sottratto da 22, rimarrà 2, che divido per 5 in questa maniera $\frac{2}{5}$, ed aggiungendo tal frazione al quoziente 4, il quoziente totale sarà $4+\frac{2}{5}$; perchè se debbo dividere 22 lire in 5 persone, vi saranno 4 lire per ciascheduna, e 2 lire o 40 soldi a dividere tra cinque persone; quindi dee ciascheduna avere di più il quinto di 2 lire, ossia 8 soldi $=\frac{2}{5}$ di lira; di modo che vi saranno 4 lire, 8 soldi per ciascheduna.

* 11. Spesso addiviene che ridur si debbano due frazioni allo stesso denominatore, senza cangiar il loro valore. Eccovi il modo onde eseguire tale operazione. Moltiplicherete li due termini della prima pel denominatore della seconda; moltiplicherete poscia li due termini della seconda pel denominatore della prima, ed avrete sciolto il problema. Siano le due frazioni $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, moltiplicando li due termini della prima pel denominatore 3 della seconda, avrete $\frac{12}{15}$, e moltiplicando li due termini della seconda per 5 denominatore della prima, vi verrà $\frac{10}{15}$. Le due frazioni ridotte hanno

hanno evidentemente il valor medesimo di prima, poichè altro non avete fatto se non moltiplicare li due termini di ciascheduna pel numero medesimo, lo che (10) non può cangiarle di valore. Di più sono esse ridotte allo stesso denominatore, perchè il denominator 15 di ciascuna è il prodotto de' denominatori 3 e 5. Se vi fossero tre o più altre frazioni le ridurrete allo stesso denominatore, moltiplicando li due termini di ciascheduna pel prodotto de' denominatori di tutte le altre.

* 12. Se si volesse aggiungere le frazioni $\frac{3}{7}$, e $\frac{2}{7}$ di eguale denominatore, si piglierà la somma de' numeratori, cui darassi il denominator comune 7; di modo che $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3+2}{7}=\frac{5}{7}$. Ma trattandosi di molte frazioni come $\frac{4}{5}$, e $\frac{2}{3}$ che hanno denominatori differenti, bisognerà ridurle allo stesso denominatore (11), e basterà allora di prender la somma delle frazioni $\frac{12}{15}$ e $\frac{10}{15}$, la quale è $=\frac{22}{15}=\frac{15}{15}+\frac{7}{15}=1+\frac{7}{15}$.

* 13. Per sottrarre una frazione da un' altra di pari denominatore, si leverà via il numeratore di quella che vuolsi sottrarre dal numeratore dell' altra, e darassi al resto il denominatore comune. Così per sottrarre $\frac{2}{7}$ da $\frac{5}{7}$, si leverà via 2 da 5, e darassi il denominator 7 al resto 3; sicchè $\frac{5}{7}-\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$. Se le fra-

zioni aveſſero denominatori differenti, dovranſi ridurre ad ugual denominatore (11), ed operar poſcia come ora abbiam detto. Quindi per ſottrarre la frazione $\frac{2}{3}$ della frazione $\frac{4}{5}$, le riduco ad egual denominatore, ed avrò le nuove frazioni $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{15}$, delle quali ſottraendo la prima dalla ſeconda, troverò per reſto $\frac{2}{15}$.

14. E' facil coſa di vedere che per moltiplicare una frazione $\frac{3}{5}$ p. e. per un numero intero 2, deeſi moltiplicare il numerator 3 per 2, per avere $\frac{6}{5}$. Diffatti la frazione $\frac{6}{5}$ vale due volte la frazione $\frac{3}{5}$; ma se moltiplicar voleſſi la frazione $\frac{3}{5}$ per la frazione $\frac{2}{4}$, dovrei moltiplicare il numeratore del moltiplicando pel numeratore del moltiplicatore, e il denominatore del moltiplicando per quello del moltiplicatore, il che darebbe il prodotto $\frac{3 \times 2}{5 \times 4} = \frac{6}{20}$; perciocchè il prodotto di $\frac{3}{5}$ pel intero 2 dev eſſere $= \frac{6}{5}$. Ma ſe in vece di moltiplicare per 2 moltiplicar debba per $\frac{2}{4}$ o pel quarto di 2, ho a trovare un prodotto quattro volte più piccolo di $\frac{6}{5}$. Ora rendeſi quattro volte minore il prodotto col render quattro volte maggiore il denominator 5, oſſia col moltiplicare 5 per 4; poichè è manifeſto che 6

con-

contiene quattro volte meno il numero 20 che il numero 5, oppure, ch' è lo stesso, la frazione $\frac{6}{20}$ vale quattro volte meno della frazione $\frac{6}{5}$. Diffatti se l' unità di cui si tratta è una lira il cui quinto vale 4 soldi, la frazione $\frac{6}{5}$ varrà 6 volte 4 soldi, o 24 soldi. Ma essendo 1 soldo il ventesimo d'una lira, la frazione $\frac{6}{20}$ non vale che 6 soldi, o il quarto di 24 soldi.

Si può ridurre un intero 3 a frazione, dandogli l'unità per denominatore, in questa maniera $\frac{3}{1}$. Se si volesse dargli il denominatore 10 p. e., si dovrà moltiplicarlo per tale denominatore, ed avrassi $\frac{30}{10} = 3$. Se si volesse moltiplicare $3 + \frac{2}{10}$ pella quantità $\frac{3}{5}$, si dovrà ridurre l' intero 3 in decimi, e così avere $\frac{30}{10} + \frac{2}{10} = \frac{32}{10}$, li quali moltiplicati poscia per $\frac{3}{5}$ daranno $\frac{96}{50}$.

*. 15. Se si bramasse dividere $\frac{3}{5}$ per $\frac{3}{2}$ si riverserebbe il divisore, val a dire scriverebbesi $\frac{2}{3}$, e moltiplicando poscia il dividendo $\frac{3}{5}$ per $\frac{2}{3}$, il prodotto $\frac{6}{15}$ darà il quoziente cercato. In fatti, se si volesse dividere $\frac{3}{5}$ per 3, o se si volesse prendere il

terzo della frazione $\frac{3}{5}$, basteria ridurre il denominator suo tre volte maggiore, oppure, ch'è lo stesso, moltiplicare il suo denominatore per 3; perciocchè la frazione $\frac{3}{15}$ non è che il terzo della frazione $\frac{3}{5}$. Quindi $\frac{3}{5}$ d'uno scudo vagliono 36 soldi, e $\frac{3}{15}$ dello scudo medesimo ne vagliono 12. Ma non si ricerca già divisa per 3 la frazione $\frac{3}{5}$, ma per $\frac{3}{2}$ ossia pella metà di 3; dunque ci siam serviti di un divisore due volte troppo grande, e abbiam trovato un quoziente due volte troppo piccolo; perciò affin di correggere un tale errore, convien moltiplicare il quoziente $\frac{3}{15}$ per 2, onde ottenere il vero quoziente $= \frac{6}{15}$. Da ciò possiamo inferire: che *per dividere una frazione per un' altra frazione, basta moltiplicare il numeratore del dividendo pel denominatore del divisore, il prodotto darà il numeratore del quoziente; ma bisogna eziandio moltiplicare il denominatore del dividendo pel numeratore del divisore, ed il prodotto darà il denominatore del quoziente.*

* 16. OSSERVAZIONE I. Allorchè la frazione ha per denominatore l'unità seguita da uno o più zeri, ella si chiama *frazione decimale*; quindi le frazioni $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{100}$ sono frazioni deci-

ma-

mali. Spesso aggiungonsi degli interi alle frazioni decimali come p. e. se si scrivesse $5 + \frac{3}{10}$ o $7 + \frac{2}{100}$. In vece di scrivere queste ultime quantità, come si vede, si scrivono altresì di questa altra maniera 5 . 3, 7 . 02; di modo che la cifra 3 che stà dopo il punto nell' espressione 5 . 3, indica il numeratore d' una frazione il cui denominator sottinteso è 10. Nel discorso si dice 5 interi e tre decimi. Nell' altra espressione 7 . 02 la cifra 7 ch' è dinanzi al punto indica gl' interi, e la cifra positiva 2 indica il numeratore d' una frazione di cui 100 è il denominator sottinteso. Rispetto poi alla cifra 0 che si trova alla sinistra della cifra 2, e che sembra non avere alcun valore, v' è messa per complettare il numero delle cifre del numeratore; perciocchè nell' uso ordinario il denominator sottinteso dee avere una cifra di più delle cifre che sono dopo il punto. Quindi per esprimere $3 + \frac{2}{1000}$, scriverassi 3 . 002, complettando il numero delle cifre che mancano al numerator 2; perchè allora ognun sa che 3 . 002 è $= + 3 \frac{2}{1000}$. Allorchè non v' ha intero unito alle frazioni decimali, scrivesi uno zero in luogo degli interi che mancano. La frazione $\frac{3}{10}$ si esprime così 0 . 3, la frazione $\frac{2}{100}$ si esprime così 0 . 02, e così delle altre.

* Se

* Se si aggiunge uno o più zeri alla fine d' una frazione decimale, si tiene come fatta l' addizione medesima al denominatore sottinteso, lo che è come se si moltiplicasse il numeratore e il denominatore per lo stesso numero, la quale operazione non fa cangiare punto il valore della frazione. Quindi la frazione $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$. La prima cifra d' una frazione decimale dopo il punto esprime decimi, la seconda centesimi, la terza millesimi, ec. Perciò la frazione 9. 35 $= \frac{35}{100}$ è $= \frac{30}{100} + \frac{5}{100} = \frac{3}{10} + \frac{5}{100}$; poichè cancellando uno zero al numeratore ed al denominatore d' una frazione, non si cangia punto il valore di essa, come l' abbiamo qui sopra notato. Da ciò si scorge che il valore delle cifre nelle frazioni decimali và diminuendo da sinistra a destra, e per conseguente crescendo da destra a sinistra, in proporzione decupla.

* Quando non sia mestieri d' una precision somma, si trascurano per ordinario li millesimi, e talor eziandio li centesimi. Quindi se la frazion decimale fosse di un danaro, si potrà trascurar li centesimi, perchè trascurando anche nove centesimi di un danaro non saria error molto considerabile. Tuttavia, allorchè l' ultima cifra trascurata vale più di cinque, o le due ultime trascurate vagliono più di cinquanta, si aggiunge una unità all' ultima cifra, cui non trascurasi già acciò sia l' error meno notabile; ma la frazione diventa allora un

poco

poco più grande ch' ella esser non dovrebbe. Sia la frazione decimale 4 . 571, se trascurar voglio le due ultime cifre che vagliono più di 50, scriverò 4 . 6 aumentando di una unità la seconda cifra che non si neglige. Diffatti la quantità negletta o . 071 vale più della metà d'un decimo: quindi aumentando la cifra 5 d'un'unità, l'errore è meno notabile che non sarebbe se non si facesse quest' aumentazione. Del resto, trascurando un numero di cifre qualunque, l'error non diventa giammai uguale all' unità della seconda cifra che non si trascura; p.e. se ho la frazione decimale 5 . 3999 ec. trascurando le cifre tutte che seguono 3, avrò 5 . 3; ora o . 3 $= \frac{3}{10}$, e o . 0999 $= \frac{999}{10000}$ $< \frac{1}{10}$, perciocchè aggiungendo 1 a 999 avrò $\frac{1000}{10000} = \frac{1}{10}$. Lo stesso argomento avrà luogo, qualunque sia il numero delle cifre che si trascurino.

* PROBLEMA. *Sommare e sottrarre le frazioni decimali*. Siano le frazioni decimali 35 . 702, 303 . 7, 2 . 25 delle quali si desideri la somma. Scrivete queste frazioni in guisa, che le unità siano sotto le unità, le decine sotto le decine, ec.

$$\begin{array}{r@{\;.\;}l} 35 & 702 \\ 303 & 7 \\ 2 & 25 \\ \hline 341 & 652 \end{array}$$

Operate poscia procedendo da destra a sinistra come pe' i numeri interi, e troverete 341 . 652. Ciò è evidente, sendo che il valore delle cifre nelle frazioni decimali va manifestamente cre-

scen-

scendo da destra a sinistra in proporzion decupla.

* Per sottrarre la frazione decimale 25 . 032 da 32 . 04, le dispongo alla stessa maniera, avvertendo di mettere la prima sotto la seconda, come qui si vede; ma non essendovi cifra alcuna che sia corrispondente a 2, metto o a lato di 4, lo che come poco fa abbiam detto, non cangia per nessun modo il valore della frazione; facendo poscia la sottrazione conforme al solito, trovo per resto 7 . 008.

32	. 040
25	. 032
7	. 008

* Collo esprimere il denominatore delle frazioni decimali come si usa per le altre, rientrano esse nella classe delle frazioni ordinarie: di modo che per operare sopra frazioni di tal fata non v' ha mestieri di regole particolari. Quindi per moltiplicare la frazione 3 . 2 per la frazione o . 5 io le esprimo così $\frac{32}{10}$, $\frac{5}{10}$. Ma il prodotto di $\frac{32}{10}$ per $\frac{5}{10}$ è $= \frac{160}{100}$, lo che sarà facil trovare moltiplicando 32 per 5; e 10 per 10. Dividendo la prima per la seconda si trova $\frac{320}{50} = \frac{32}{5}$; perchè levando uno zero al numeratore ed al denominatore non si fa che dividere li due termini della frazione per 10, lo che non cangia punto il suo valore.

OSSERVAZIONE II. Supponghiamo che venga proposto da valutare la frazione $\frac{5}{6}$ d'una tesa

ni

in parti note della tesa. Poichè la tesa vale 6 piedi, moltiplico il numeratore 5 per 6, ed ho la nuova frazione $\frac{30}{6}$ ch'è una frazione di piede; ma 30 diviso per 6 dà 5; dunque la frazione proposta val 5 piedi. Per valutare la frazione $\frac{3}{8}$ di una lira, moltiplico il numerator 3 per 20, perchè la lira vale 20 soldi, ed ho la frazione $\frac{60}{8}$ ch'è manifestamente una frazione di soldo, sendo che il numeratore 60 è 20 volte maggiore che il numeratore 3 della frazione proposta. Ora si divida 60 per 8, il quoziente sarà 7 con un resto 4; quindi la frazione proposta vale 7 soldi, più la frazione $\frac{4}{8}$ di soldo. Per valutare quest'ultima frazione, la riduco in frazione di danaro, moltiplicando il numerator 4 per 12, il quale esprime quante volte nel soldo è contenuto il danaro, ed ho $\frac{48}{8} = 6$; val a dire che quest'ultima frazione vale 6 danari, e la proposta vale 7 soldi e 6 danari. La frazione $\frac{15}{7}$ di soldo vale 2 soldi $+ \frac{1}{7}$ di soldo; ma $\frac{1}{7}$ di soldo vale $\frac{12}{7}$ di danaro, o 1 danaro $+ \frac{5}{7}$ di danaro.

Della

Della Moltiplicazione e Divisione de' numeri complessi.

* 17. PROBLEMA. *Quanto costeranno 3 tese 2 piedi di muraglia a 2 lire 3 soldi la tesa?* Riduco le tese in piedi moltiplicando 3 per 6, stante che la tesa vale 6 piedi; al prodotto 18 aggiungo 2 per avere il numero totale 20 piedi; riduco le lire in soldi, moltiplicando 2 per 20, al prodotto 40 aggiungo 3 ed ho 43 soldi. Moltiplicando 43 per 20, il prodotto 860 indica quanto costerebbero 20 piedi, se ciascun piede costasse 43 soldi. Ma non è già il piè che costi 43 soldi, bensì la tesa che vale 6 piedi; quindi 20 piedi costano solo la sesta parte di 860 soldi. Deesi dunque dividere 860 soldi per 6, il quoziente sarà 143 soldi con un resto 2 soldi. Questo resto vale 24 danari, la sesta parte de' quali è quattro danari. Aggiungendo questi al quoziente, avremo 143 soldi 4 danari; dunque le 3 tese e 2 piedi costano 143 soldi 4 danari, o riducendoli in lire (lo che si fa col dividere 143 per 20) 7 lire 3 soldi 4 danari.

* NOTA 1. Che moltiplicando 43 soldi per 20 si dee considerare il moltiplicatore come un numero *puro* ed *astratto*, val a dire, come un numero contenente unità semplici, e non come un numero *concreto*, che rinchiuda cioè delle unità di una specie determinata, come p. e. piedi; perchè saria ridicolo il moltiplicare soldi per piedi.

* 2.

* 2. Che se si avesse domandato il prezzo di 20 tese a 2 lire 3 soldi la tesa, si avrebbe trovato per risultato 860 soldi o 43 lire, e non saria stato mestieri di ridurle in piedi, nè di fare la divisione per *6*.

* 3. Che nei quesiti di tal fata, deesi ridurre il moltiplicando ed il moltiplicatore, ciascuno alla sua specie più piccola; fare poscia la moltiplicazione conforme il solito, e dividere il prodotto pel numero esprimente quante volte la specie maggiore del moltiplicatore contenga la minore: quindi se il moltiplicatore avesse contenuto de' pollici, avremmo ridotto il moltiplicatore in pollici; parimenti se il moltiplicando avesse contenuto de' danari, ridotto lo avremmo in danari, e diviso il prodotto per 72, perchè la tesa vale 72 pollici. Avremmo poscia ridotto li danari in soldi, e li soldi in lire.

* In quanto al moltiplicando, esso può esser fatto conoscere dalla natura sola della questione. Nel proposto esempio scorgesi agevolmente, che il moltiplicando è il danaro che si cerca nel prodotto.

* 18. PROBLEMA, contenente la divisione de' numeri complessi. *2 tese 5 piedi avendo costato 18 lire 14 soldi, si domanda il prezzo della tesa*. Riduco 18 lire 14 soldi in soldi, per avere 374 soldi; riduco parimenti 2 tese 5 piedi in piedi, per avere 17 piedi, e dividendo 374 per 17, ho 22 per quoziente, val a dire che ciascun piede vale 22 soldi, o 1 lira 2 soldi. Ma la tesa vale *6* piedi; dunque

que la tesa vale *6* volte 1 lira 2 soldi, o *6* lire 12 soldi.

Si può notare 1. Che dividendo per 17, ossia prendendo la diciassettesima parte del dividendo, si ha considerato il divisore come numero puro, poichè sarebbe cosa ridicola dividere soldi per piedi. 2. Che dopo la divisione moltiplicar debbesi il quoziente pel numero esprimente quante volte la specie grande del divisore contiene la piccola.

* ALTRO ESEMPIO. 2 tese 5 piedi avendo costato 18 lire 15 soldi, quale sarà il prezzo della tesa? 18 lire 15 soldi vagliono 375 soldi, che divider dovrannosi per 17 piedi = 2 tese 5 piedi; il quoziente sarà 22 con 1 di resto, che darà la frazione $\frac{1}{17}$; quindi il quoziente intero sarà 22 soldi $+ \frac{1}{17}$ di soldo, cui moltiplicato per *6* darà 132 soldi $+ \frac{6}{17}$ di soldo $=$ *6* lire 12 soldi $+$ 4 danari $+ \frac{4}{17}$ di danaro, valutando in danari la frazione $\frac{6}{17}$ di soldo.

* *19*. Troverassi lo stesso risultato per via del metodo seguente. Basta moltiplicare il dividendo pel numero che addita quante volte la specie grande del divisore contenga la picciola, e dividere il prodotto pel divisore. Adunque moltiplicato avendo 375 per *6*, divido il prodotto 2250 per 17, ed ho per quoziente 132 soldi $+ \frac{6}{17} =$ *6* lire 12 soldi 4

da-

danari, trafcurando la frazione $\frac{4}{17}$ che non monta al quarto di un danaro.

20. Rifpetto al dividendo e al divifore, effo pure è dato a conofcere dalla natura foltanto della queftione. Così negli efempj fuaccennati, egli è manifefto che il danaro era il dividendo, e che cercavafi danaro nel quoziente.

DELL'

ALGEBRA.

21. L' *Algebra* è una ſcienza che tratta della grandezza o quantità eſpreſſa per via di caratteri che hanno ſigificazione indeterminata: tali ſono le lettere dell' alfabeto, le quali non avendo per ſe medeſime alcuna ſignificazione determinata, rappreſentar poſſono ogni ſorta di numeri, moti, velocità; ec. Poſſo ſupporre che la lettera *a* ſignifichi 5, che la lettera *b* ſignifichi 10, ec. Non dee recarci faſtidio una ſignificazione sì vaga, perchè nelle applicazioni alle queſtioni particolari ſi ſa già qual ſia il valore delle lettere che ſi adoperano, o trovaſi almeno il valore loro per mezzo delle regole dell' algebra. Si diſtinguono in algebra le quantità *poſitive* dalle quantità *negative*; le ſeconde non ſon meno reali delle prime; ma ſono eſſe pigliate in un ſenſo oppoſto. Così il danaro di cui andiam debitori può eſſer riguardato come negativo riſpetto a quello che poſſediamo. Se uno poſſede 25 luigi, e n' è debitore di 10, egli avrà un bene poſitivo di 25 luigi, ed un bene negativo di 10 luigi.

gi . Parimente il moto verso nord preso per positivo, darà negativo il moto verso mezzodì. Le quantità positive precedute sono dal segno +, e le negative dal segno −; quindi uno ch'è debitore di 10 luigi, e che n'ha in sua borsa 25, è giudicato ricco di + 25 luigi − 10 = + 15 luigi. Dal che agevolmente si scorge che le quantità negative diminuiscono in generale le quantità positive. Ma se si aggiugnesse zero o nulla a 25 luigi, si avrebbe 25 luigi + 0 = + 25 luigi; dunque una quantità negativa, in quanto al suo effetto, e non già in se medesima, è minore del nulla, il quale non diminuisce punto le quantità positive, come lo fa una quantità negativa. Allorchè una quantità è senza alcun segno, si tiene come preceduta dal segno +; quindi 25 è tenuto = + 25; ma il segno − non è mai sottinteso.

22. Per indicare che si moltiplica una quantità a per una quantità b, si scrivono l' una a lato dell'altra in questo modo ab, oppur anche $a.b$, mettendo un punto nello spazio tra l'una e l'altra; o anche in questa maniera $a \times b$, mettendo tra esse il segno della moltiplicazione. Se supponghiamo $a = 3$, e $b = 5$, avremo $ab = 3 \times 5 = 3 . 5 = 15$. Per moltiplicare a per a, si scriverà aa oppure a^2. Per indicare il prodotto di aa per a, si scriverà aaa o a^3. La cifra 3 indica che la lettera dev'essere scritta 3 volte. Parimente in vece di scrivere $aaaaa$, si può scrivere a^5. Le cifre che sono poste alla destra delle let-

tere, ed alquanto più alte delle lettere si dicono *esponenti*. Quindi nella espressione a^2, 2 è l'esponente di a, ed indica il prodotto di a per a. Qualora non abbia una lettera alcun esponente espresso, si dee sempre supporre aver essa per esponente l'unità. Quindi b dee tenersi $= b^1$, a dee tenersi $= a^1$, ec. Un numero che si trova alla sinistra d'una quantità algebrica chiamasi *coefficiente* di essa quantità; quindi nell'espressione $2a$, 2 è il coefficiente di a, la qual cifra mostra doversi prendere 2 volte la quantità a. Qualora non v'abbia coefficiente espresso, si suppone che la quantità algebrica abbia il coefficiente 1; quindi b si valuta $= 1b = 1b^1$; imperciocchè b è lo stesso che una volta b. Passa differenza grandissima tra un coefficiente, ed un esponente; quindi $2a$ è una quantità molto diversa da a^2; imperciocchè se si suppone $a = 5$, $2a$ o due volte 5 varranno 10, ma a^2 sarà $= a \times a = 5 \times 5 = 25$.

23. Per *aggiungere ossia sommare le quantità algebriche*, si scrivono le une a fianco delle altre co' loro segni + o − tali quali sono; quindi per sommare a con b, si scriverà $a + b$, perchè b si valuta $= + b$. Per aggiungere $- c$ con $a + 2b$, si scriverà $a + 2b - c$; parimenti volendo aggiungere $+ 5$ a $12 - 7$, si scriverà $12 - 7 + 5$. E per aggiungere $- 3$ a 12, si scriverà $12 - 3$, ove è facil vedere che la quantità negativa $- 3$ diminuisce la quantità positiva 12.

24. Volendo *sottrarre una quantità alge*-
bri-

brica da un' altra, si scrive quella che si vuol sottrarre a fianco di quella da cui si sottrae, avvertendo solo di cangiare li segni della quantità che si sottrae. Quindi per sottrarre 5, o $+5$ da 12 o da $+12$; scrivo $12-5=7$, il che è evidente. Per sottrarre b da a, scrivo $a-b$. Ma per sottrarre $7-5$ da 12, scrivo $12-7+5=10$; diffatti non voglio sottrar già 7 da 12, ma soltanto $7-5$ o 2; dunque scrivendo $12-7$ ho levato via 5 di più; perciò debbo aggiunger $+5$ onde avere il risultato $10=12-7+5$.

Una quantità non congiunta ad altre quantità mediante il segno $+$ o $-$ si chiama *monomio*; così $3ab$, a, $2p$ sono monomii. Due quantità unite insieme per via del segno $+$ o $-$ si dicono *binomie*; così $a+2b$ è un binomio, e ciascuna delle quantità separate dai segni $+$ o $-$ si appella un *termine*; così a è un termine; $+2b$ un altro termine. Allorchè vi sono tre termini, si ha un *trinomio*, un *quadrinomio* se vi sono quattro termini. Finalmente appellasi *polinomio* una quantità composta di molti termini. In un polinomio il primo termine, quando sia positivo, non è d'ordinario preceduto da nessun segno.

25. Volendo moltiplicare una quantità algebrica positiva e monomia per un' altra monomia, e positiva, si moltiplicherà il coefficiente del moltiplicando per quello del moltiplicatore, si scriveranno poscia le lettere del moltiplicando e quelle del moltiplicatore le une a fianco delle altre; quindi $2a$ moltipli-

cato per $3b$ darà $6ab$; a moltiplicato, essendo per b, sarà $= 1a \times 1b = 1ab = ab$, perchè 1 moltiplicato per 1 dà 1 per prodotto; ora il coefficiente 1 è sottinteso sempre che non trovisi espresso. Li coefficienti non altro essendo che numeri, egli è evidente, che debbon essere moltiplicati giusta la regola ordinaria della moltiplicazione de' numeri. In quanto poi alle lettere, si è convenuto di esprimerne il prodotto scrivendole l'une appresso delle altre. Intorno a ciò giova osservare che il prodotto ab è $= ba$; imperciocchè supposto $a = 5$ e $b = 3$, si avrà $ab = 5 \times 3 = 15$, e ba sarà $= 3 \times 5 = 15$. Quindi non mette differenza alcuna lo scrivere prima una piuttosto che un' altra lettera; ma a maggiore chiarezza, scrivonsi per ordinario le lettere secondo l'ordine alfabetico. Quando si tratta di moltiplicare una lettera per una stessa lettera, deesi aggiungere l'esponente del moltiplicatore a quello del moltiplicando, e quindi a^2 moltiplicata essendo per a^3 darà $a^{2+3} = a^5$. In fatti $a^2 = aa$, ed $a^3 = aaa$; ora $aa \times aaa = aaaaa = a^5$.

Veniamo ora alla regola de' segni. Abbiam già notato *che allora quando il moltiplicando, ed il moltiplicatore hanno ambidue il segno + o il segno − il prodotto dee avere il segno +; ma un tale prodotto avrà il segno − se il segno del moltiplicando è diverso da quello del moltiplicatore*. Sia proposto da moltiplicare $+5 - 2$, o $5 - 2$ per $+6 - 4$, o per $6 - 4$; egli è chiaro che $5 - 2$ essendo $= 3$, e $6 - 4 = 2$, il prodotto dev' essere

ſere $= 3 \times 2 = 6$. Veggiamo dunque ſe troveremmo queſto riſultato oſſervando la regola precedente. Diſpoſto avendo il moltiplicatore ſotto al moltiplicando, come qui ſi vede, moltiplico incominciando da ſiniſtra (tale eſſendone l'uſo nella moltiplicazione algebrica) la prima cifra $+5$ del moltiplicando per la prima cifra $+6$ del moltiplicatore; il prodotto dà 30, o $+30$. Moltiplico poi la ſeconda cifra -2 del moltiplicando per la prima cifra $+6$ del moltiplicatore, lo che, giuſta la regola, mi da -12 per prodotto; perciò ſcrivo -12 a lato di $+30$. Moltiplicando nuovamente la prima cifra $+5$ del moltiplicando per la ſeconda -4 del moltiplicatore, il riſultato, ſecondo la regola, diventa $= -20$, che ſcrivo nel prodotto. Finalmente moltiplico la ſeconda cifra -2 del moltiplicando per la ſeconda cifra -4 del moltiplicatore, e il prodotto, giuſta la regola, dev' eſſere $+8$; quindi il prodotto totale è $30 - 12 - 20 + 8 = +6 = 6$, come dev' eſſere.

$$\begin{array}{l} +5-2 \\ +6-4 \\ \hline +30-12-20+8=6 \end{array}$$

Quando ſi dee moltiplicare un polinomio per un monomio, ſi moltiplica ciaſcun termine del moltiplicando pel moltiplicatore, e ſi ſcrìvono li differenti prodotti co' loro ſegni. In algebra ſi moltiplica andando da ſiniſtra a deſtra.

ESEMPIO. Sia propoſto da moltiplicare $a + 2b - 3df$ per $2a$. Dopo avere ſcritto il

moltiplicatore sotto il primo termine a del moltiplicando, tiro una linea di sotto, e dico 1 (coefficiente

$$\begin{array}{l} a+2b-3df \\ 2a \\ \hline 2a^2+4ab-6adf \end{array}$$

sottinteso del primo termine a del moltiplicando) moltiplicato per 2, dà 2 che scrivo nel prodotto; e moltiplico poscia a per a; e scrivo a^2 a lato della cifra 2. Dopo moltiplicando il secondo termine $+2b$ del moltiplicando pel moltiplicatore $2a$, dico 2 volte 2 fanno 4, e poscia a moltiplicato per b dà ab, perciò scrivo $+4ab$ nel prodotto. Indi moltiplicando -3 per $2=+2$, dico -3 moltiplicato per $+2$ dà -6; il quale scrivo, e finalmente df moltiplicato essendo per a dà adf che scrivo a lato di -6, ed il prodotto totale è $2a^2+4ab-6adf$.

Se si dovesse moltiplicare un polinomio per un altro polinomio, si moltiplicherà tutto il moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore, e si scriveranno li differenti prodotti co' loro segni. Quindi per moltiplicare $a-b$ per $a+b$, avendo scritto il moltiplicatore sotto il moltiplicando, come qui si scorge,

$$\begin{array}{l} a-b \\ a+b \\ \hline a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2 \end{array}$$

moltiplico il moltiplicando $a-b$ pel primo termine a del moltiplicatore, per avere il prodotto a^2-ab, che scrivo come si vede. Moltiplicando di nuovo il moltiplicando intero pel secondo termine $+b$ del moltiplicatore, scri-

scrivo tutto di seguito il prodotto $+ab - b^2$. Osservo poscia che le quantità $-ab$ e $+ab$ si distruggono, come -5 è distrutto da $+5$ (perchè $-5+5=0$); quindi il prodotto cercato è $=a^2 - b^2$.

26. Parimenti troveremo che moltiplicando $a+b$ per $a+b$, il prodotto sarà $a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$; perchè una volta ab ed un'altra volta ab fanno 2 volte ab o sia fanno $2ab$. Se $a=2$, e $b=\frac{1}{2}$, si avrà $a^2 = a \times a = 2 \times 2 = 4$, $2ab = a \times a \times b$ sarà $= 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 4 \times \frac{1}{2}$ (perciocchè $2 \times 2 = 4$) $= \frac{4 \times 1}{2}$ (perciocchè giusta ciò che abbiam detto parlando delle frazioni (vedi il n.° 14) per avere il prodotto di una frazione per un numero intero, oppure, lo che torna allo stesso, d' un intero per una frazione, basta moltiplicare il numeratore per l' intero) $= \frac{4}{2} = 2$: perchè 4 diviso per 2 dà 2 al quoziente. Si avrà altresì $b^2 = b \times b = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; essendochè per moltiplicare la frazione $\frac{1}{2}$ per la frazione $\frac{1}{2}$ convien moltiplicare li numeratori gli uni pegli altri egualmente che li denominatori; ora si sa essere $1 \times 1 = 1$, e $2 \times 2 = 4$. Dunque il prodotto $a^2 + 2ab + b^2$ varrà in tal caso, $4 + 2 + \frac{1}{4}$, o $6 + \frac{1}{4}$. Se si vuol supporre $a = 2$ e $b = \frac{1}{3}$, il prodotto var-

varrà $4+\frac{4}{3}+\frac{1}{9}=4+\frac{3}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=4+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$, perchè 3 diviso per 3 dà 1. Ma moltiplicando il numeratore e il denominatore della frazione $\frac{1}{3}$ per 3, lo che (giusta il n.° 10) non cangia punto il suo valore, si ha $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$; dunque la quantità suddetta diventa $=5+\frac{3}{9}+\frac{1}{9}=5+\frac{4}{9}$: imperciocchè $\frac{3}{9}$ ed $\frac{1}{9}$ sono evidentemente $\frac{4}{9}$. Se si vuol supporre $a=2$, e $b=\frac{1}{4}$, il prodotto $a^2+2ab+b^2$ varrà $4+\frac{4}{4}+\frac{1}{16}=4+1+\frac{1}{16}=5+\frac{1}{16}$. Ma facendo $a=2$ e $b=\frac{1}{5}$, questo prodotto diventa $4+\frac{4}{5}+\frac{1}{25}$, che vale meno di 5. Passiamo alla divisione.

27. Le regole che siamo per dare intorno alla divisione hanno per loro fondamento questo principio: *Il prodotto del divisore pel quoziente, o del quoziente pel divisore esser dee uguale al dividendo*. Questo principio segue da ciò che abbiamo detto di sopra (*6*) parlando della divisione de' numeri.

I. Regola. Debbonsi dividere li coefficienti l'uno per l'altro, come si dividono li numeri.

II. Regola. In quanto spetta alle lettere debbonsi scrivere quelle che sono nel dividendo e nol sono nel divisore, e volendo dividere una lettera per una stessa lettera, deesi

levar

lavar via l' esponente del divisore da quello del dividendo.

III. REGOLA. Il quoziente dee avere il segno $+$ se il dividendo e il divisore hanno uno stesso segno; ma dee avere il segno $-$ se il dividendo e il divisore hanno segni differenti. Quindi per dividere $+6ab$ per $2a$, scriverò $+3b$ nel quoziente, dividendo prima $+6$ per $+2$, il che dà 3, e poscia dividendo ab per a il che dà b; di modo che l' intero quoziente è $+3b$. Di fatti moltiplicando il divisore pel quoziente, troverò il dividendo $+6ab$. Parimenti il quoziente di $3ab$ per a, o per $1a$ sarà $=3b$; perchè 3 diviso per 1 dà 3; così pure il quoziente di a^2b^3, $=aabbb$ per ab^2 o per abb sarà $=ab$, levando via l'esponente 1 (sottinteso in a) dall' esponente 2, e l' esponente 2 di b dall' esponente 3 che trovasi nel dividendo. In fatti moltiplicando ab^2 per ab, si trova a^2b^3. Il quoziente di $+6ab$ diviso per $-2a$, sarà $=-3b$; perciocchè il prodotto di $-2a$ per $-3b$ dà il dividendo $+6ab$. Parimenti il quoziente di $-6ab$ diviso per $+2a$ sarà $=-3b$; imperciocchè $+2a\times-3b=-6ab$. Ma il quoziente di $-6ab$ per $-2a$ sarà $=+3b$, perciocchè $-2a\times+3b=-6ab$, ch'è il dividendo. Se non si osservassero le regole ora dette, il prodotto del divisore pel quoziente non potrebbe restituire il dividendo.

Tali sono le regole da osservarsi allorchè si tratti di dividere un monomio per un monomio. Ma nella divisione de' polinomii, si or-

dinan

dinan comunemente il dividendo e il divisore per rapporto ad una stessa lettera; val a dire; che si dispone il dividendo e il divisore in guisa; che la lettera per rapporto alla quale si vuol ordinare, trovisi nel primo temine col maggior esponente; nel secondo termine col maggior esponente che vien dopo, ec. Ciò fatto si divide il primo termine del dividendo pel primo termine del divisore; si scrive il quoziente; si moltiplica il divisore intero pel quoziente che si ha scritto, e si leva via il prodotto dal dividendo, si continua a dividere il resto del dividendo alla stessa maniera.

* ESEMPIO. Venga proposto di dividere la quantità $2ab+b^2+a^2$ per la quantità $-a-b$: Ordinando il dividendo per rapporto alla lettera a, (*imperciocchè il divisore si trova già ordinato per rapporto a questa lettera medesima) e disponendo il dividendo

$$\begin{array}{lll|l} a^2 & +2ab & +b^2 & -a-b \\ \hline o & & & -a-b \\ \underline{\pm a^2} & \underline{\pm ab} & & \\ & +ab & +b^2 & \\ & o & o & \\ & \underline{\pm ab} & \underline{\pm b^2} & \end{array}$$

e il divisore a lato l' uno dell' altro come si vede: divido il primo termine a^2 ($o+a^2$) per $-a$, e scrivo $-a$ nel quoziente e sotto il divisore. Moltiplicando il divisore pel quoziente $-a$, il prodotto è $+a^2+ab$ che scrivo sotto del dividendo. Per sottrarre questo prodotto, cangio li segni, e veggo poscia che a^2 è distrutta da $-a^2$; laonde scrivo o sotto il termine a^2 del dividendo. Veggo ancora che

che $-ab$ distruggendo $+ab$, il termine $+2ab$ del dividendo diventa $+ab$; di modo che resta al dividendo $+ab+b^2$, che scrivo di sotto, come si vede. Dividendo il primo termine $+ab$ di questo resto pel primo termine $-a$ del divisore, ho $-b$ per quoziente: scrivendo $-b$ al quoziente, e moltiplicando il divisore intero per $-b$, viene $+ab+b^2$, che scrivo sotto la quantità ora divisa. Cangio li segni per fare la sottrazione, e perchè $+ab$ è distrutto da $-ab$, e perchè $+b^2$ è del pari distrutto da $-b^2$, scrivo o sotto li termini distrutti, e non restando più nulla al dividendo l' operazione è finita.

* 28. Ma se il dividendo fosse un polinomio, e il divisore un monomio, si dovrà dividere ciascun termine del dividendo pel divisore, e scrivere li quozienti co' loro segni. Laonde per dividere $2a^2xp-6axp^3z$ per $2axp$, scritto avendo il divisore a fianco del dividendo, divido il primo termine $2a^2xp$ del dividendo pel divisore $2axp$, dicendo: 2 quante volte stà in 2, vi stà una volta; perciò dovrei scrivere 1 al quoziente; ma perciocchè a^2xp diviso per axp dà a, ed essendo il coefficiente 1 sempre sottinteso innanzi a, perciò mi contento di metter a nel quoziente. Dividendo poscia $-6axp^3z$ per $2axp$, ho per secondo quoziente $-3p^2z$ che scrivo a lato del primo. Laonde il quo-

$$\begin{array}{l|l} 2a^2xp-6axp^3z & 2axp \\ \hline & a-3p^2z \end{array}$$

zien-

ziente intero è $= a - 3p^2z$. Difatti moltiplicando tal quoziente pel divisore, trovasi il dividendo.

* Parimenti dividendo $6a + 3ab - 6$ per -3, il quoziente sarà $-2a - ab + 2$. Imperciocchè $6, 0 + 6$ diviso per -3 dà -2; e siccome non v'è lettera alcuna nel divisore, deesi scrivere a lato la lettera a che trovasi nel dividendo. $3ab$ essendo diviso per -3 darà $-ab$, perchè 3 diviso per 3 dà 1, e perchè già il coefficiente 1 è sottinteso innanzi ab. Finalmente -6 diviso per -3 dà evidentemente $+2$. Se si fa la moltiplicazione del divisore pel quoziente intero, si troverà il dividendo.

* Spesse volte addiviene che non possasi fare la divisione esattamente. Così non si può dividere ap per m; in tal caso si indica la divisione per via di una frazione il cui numeratore è il dividendo, e divisore il denominatore. Laonde la frazione $\frac{ap}{m}$ indica là divisione di ap per m. Una tale divisione può tuttavia aver luogo qualor si diano diversi valori al numeratore e al denominatore. Quindi nella frazione $\frac{p}{x}$, se si supponga $p = 10$ ed $x = 2$ là divisione di p per x darà $\frac{10}{2} = 5$; ma se p è supposto $= 5$ ed $x = 7$, la divisione di 5 per 7 sarà impossibile. La frazione $\frac{MU + mu}{M + N}$ indica la divisione di $MU + mu$ per la quantità $M + N$. Parimenti la frazione

ne $\frac{MU-mn}{M+N}$ indica la divisione di $MU-mn$ per $M+N$.

Delle Potenze, e delle Radici.

29. La *prima potenza* di una quantità è questa quantità medesima, la *seconda potenza* detta eziandio *quadrato*, è il prodotto di una quantità moltiplicata per se stessa. Quindi a si è la prima potenza di a, $a \times a = a^2$ si è la seconda potenza ossia il quadrato di a. In numeri, 5 è la prima potenza di 5; 5×5 ossia 25 è il quadrato di 5. Il prodotto del quadrato moltiplicato per la prima potenza appellasi *cubo*. Quindi $a^2 \times a = a^3$ è il cubo di a; 25 moltiplicato per 5 ossia 125 è il cubo di cinque. La quarta potenza è il prodotto del cubo, ossia della terza potenza per la prima potenza; quindi $a^3 \times a = a^4$ è la quarta potenza di a, ec.

Eccovi li quadrati e li cubi di tutti li numeri interi da 1 insino a 12.

Numeri.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Quadr.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.	100.	121.	144.
Cubi.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.	1000.	1331.	1728.

Trattandosi di una frazione, se ne trova il quadrato prendendo quello del suo numeratore e quello del suo denominatore; trovasene il cubo prendendo quello del numeratore e quello del suo denominatore; quindi il quadrato della frazione $\frac{3}{5}$ è $\frac{9}{25}$ ed il suo cubo è $\frac{27}{125}$. Se si volesse avere il quadrato di $a+b$, si de-

si dovrà moltiplicare $a+b$ per $a+b$, e si troverà (26) $a^2+2ab+b^2$.

La quantità la quale moltiplicata per se stessa ha dato il quadrato, chiamasi *radice quadrata*; quindi a è la radice quadrata di a^2; 5 è la radice quadrata di 25. La quantità, di cui il prodotto del quadrato per la prima potenza, ha dato il cubo, si nomina *radice cubica*, o *radice cuba*, o *radice terza*; quindi a è la radice cubica di a^3. 5 è la radice cubica di 125; $\frac{3}{5}$ è la radice quadrata di $\frac{9}{25}$, e la radice cubica di $\frac{27}{125}$. Quando si parla di una radice senza specificar quale ella sia, s' intende sempre parlare della radice quadrata.

Per significare la radice quadrata si fa uso per ordinario del segno $\sqrt{\ }$, che si nomina *segno radicale*; quindi $\sqrt{(a^2)}$ indica la radice di a^2; laonde $\sqrt{(a^2)}$ è $=a$.

* Conviene osservare che una radice essendo la quantità la quale moltiplicata per se medesima dà il quadrato, e che il prodotto di $+a$ per $+a$ essendo $=+a^2$, come pure il prodotto di $-a$ per $-a$ il quale è ancora $=+a^2$, la quantità a^2 può avere due radici l'una positiva $=+a$, e negativa l' altra ed $=-a$. Perciò si può mettere il segno $\pm$ innanzi il radicale $\sqrt{\ }$; laonde $\sqrt{(a^2)}=\pm\sqrt{(a^2)}=\pm a$. Ma nella radice di $-a^2$, che si indica così $\pm\sqrt{(-a^2)}$, egli è impossibile di trovare alcuna quantità positiva o negativa, la quale moltiplicata per

se

se medesima dar possa $-a^2$. Sia $a^2 = 9$; è impossibile trovare una quantità che moltiplicata per se stessa dia -9. Imperciocchè $+3 \times +3 = +9$. Parimenti $-3 \times -3 = +9$ (giusta le regole della moltiplicazione:) dunque la radice $\mp\sqrt{(-9)}$ è una quantità impossibile. Le quantità di questa fatta diconsi *immaginarie*.

30 Secondo la tavola de' quadrati, 4 è il quadrato di 2, e 9 il quadrato di 3. Il numero 5 maggior essendo di 4 e minore di 9, dee avere una radice maggiore di 2 e minore di 3. Tuttochè non sia possibile di trovare esattamente tal radice, sarà però facilissimo l'averla per approssimazione. Per dimostrarlo, suppongo che la radice di 5 ossia $\sqrt{5}$ sia $= 2 + \frac{1}{2} = a + b$, facendo $a = 2$, e $b = \frac{1}{2}$. Secondo ciò che qui sopra abbiam detto (26), moltiplicando questa quantità per se medesima per innalzarla al quadrato, si trova $6 + \frac{1}{4}$, quantità maggiore di 5: ma in questo modo la radice supposta è di soverchio grande. Perciò la suppongo $= 2 + \frac{1}{4}$; se moltiplico questa quantità per se stessa, trovo (26) $5 + \frac{1}{16}$, quantità non molto diversa da 5. Quindi la radice supposta $2 + \frac{1}{4}$ non differisce gran fatto dalla vera radice che moltiplicata per se stessa dovrebbe dare 5, la quale si considera allora come un quadrato.

* Eccovi come eseguire in altra maniera cotesta approssimazione. Prendete la differenza del numero 5 dato al maggior quadrato 4 compreso nel 5; dividete tal differenza per 5, differenza tra il quadrato 4 ed il quadrato 9 immediatamente superiore, aggiungete il quoziente alla radice del quadrato 4 per avere $2+\frac{1}{5}$, radice approssimata di 5. Sia ancora il numero 3 di cui si domandi la radice approssimata; divido 2 differenza tra il maggior quadrato 1 contenuto in 3, per 3, differenza tra il quadrato 1 ed il quadrato 4 immediatamente superiore, ed aggiungo $\frac{2}{3}$ alla radice del quadrato 1 per avere $1+\frac{2}{3}$, radice approssimata di 3. In fatti moltiplicando questa quantità per se medesima si trova $1+\frac{4}{3}+\frac{4}{9}=2+\frac{1}{3}+\frac{4}{9}=2+\frac{3}{9}+\frac{4}{9}=2+\frac{7}{9}$, che non differisce da 3 se non di $\frac{2}{9}$.

31. Per estrarre le radici numeriche, convien risovenirsi la tavola de' quadrati e de' cubi de' numeri che qui sopra abbiam dato (29), e ciò fatto vedrassi agevolmente poter un numero di una cifra sola aver tre cifre nella radice, poichè 10 ch'è il minor numero di due cifre ha per quadrato 100, ch'è il minor numero di tre cifre: 99 ch'è il maggior di due cifre, ha per quadrato 9801 che non contiene se non quattro cifre; laonde un numero qualunque non può nel suo quadrato avere di

di più che il doppio delle sue cifre.

* Per avere il quadrato di 25, moltiplico 25 per 25, il risultato 625 è il quadrato di 25. Ciò potrei fare anche in quest' altra maniera; prendendo il quadrato della sua prima cifra 2, scrivo 4, come qui si vede; poscia prendo il doppio della prima cifra, che è 4. Moltiplico questo doppio per la seconda cifra 5, scrivo il prodotto 20 sotto 4, facendolo avanzar fuori una fila verso la destra (se non vi fosse che una cifra nel prodotto, dovrebbesi farla avanzare medesimamente una fila verso la destra). Appresso prendo il quadrato della seconda cifra ossia di 5, cioè 25 che inoltro anch'esso d'una fila, e prendendo poscia la somma, trovo 625, come qui sopra. Quindi concludo che spartendo in membri il quadrato 625 in questa maniera 6,25, sicchè il primo membro a destra contenga due cifre, il quadrato della prima cifra della radice dee trovarsi nel primo membro 6 della sinistra, e il prodotto del doppio della prima cifra per la seconda nella prima cifra 2 del secondo membro. Finalmente il quadrato della seconda cifra dev' essere nell' ultima cifra 5 del secondo membro. Quando diciamo che il doppio della prima cifra moltiplicato per la seconda dee trovarsi nella prima cifra del secondo membro, e che il quadrato della seconda cifra dee trovarsi nell'ultima cifra dello stesso secondo membro, ciò s' intenda dell'ultima cifra a destra di tale

```
  4
  20
   25
 ----
 625
```

prodotto e del quadrato di 5 . Se il numero che si vuole innalzare al quadrato avesse più di due cifre , si piglierà di più il doppio del prodotto delle due prime per la terza col quadrato della terza, poi il doppio del prodotto delle tre prime per la quarta col quadrato della quarta, e così di mano in mano, avanzando sempre d' una fila verso la destra ciascun prodotto e ciascun quadrato. Da ciò caviamo la regola seguente : Ad avere la radice di un numero , spartite un tal numero in membri incominciando da destra, così che ciascun membro sia di due cifre , eccetto che il primo a sinistra , il quale sarà di una cifra solamente, allorchè il numero delle cifre sarà dispari ; prendete il quadrato maggiore contenuto nel primo membro della sinistra , cavatene la radice la quale scriverete a parte , innalzate questa radice al quadrato , levate via questo quadrato dal primo membro , a lato del resto , se ve ne ha, o a lato di o, se non ve n' ha, abbassate il secondo membro e prendete per dividendo il resto, se ve n' ha, unito alla prima cifra del membro abbassato , o la prima cifra sola del membro abbassato se non vi è alcun resto . Prendete per divisore il doppio della radice trovata , scrivete il quoziente alla radice ; moltiplicate il divisore pel quoziente , aggiungete al prodotto , avanzando una fila verso la destra , il quadrato del quoziente ; se la somma può esser sottratta dal membro abbassato , unito al resto , se ve n' ha, la cifra trovata è buona ; se no, si diminuirà il quozien-

ziente di un'unità, ed anche si scriverà o, se mettendo 1 alla radice non si possa fare la sottrazione ora detta. Lo stesso dovrà operarsi per li membri seguenti, prendendo per divisore il doppio di tutta la radice trovata, e per dividendo la prima cifra del membro abbassato unita al resto dei precedenti, se ve n'ha; o questa prima cifra sola se non v' ha alcun resto.

* Venga proposto di estrarre la radice quadrata del numero 628. Avendo spartito il numero in membri, come abbiam detto; veggo per via della tavola de' quadrati, essere 4 il maggior quadrato contenuto in 6, ne prendo la radice 2 che scrivo, come si vede. Solevando 2 a quadrato; scrivo 4 sotto 6, levando via 4 da 6, resta 2. A lato di questo resto abbasso il membro seguente, metto un punto sotto la sua prima cifra,

6, 28	25 (3)
4	4
228	
225	
3	

per ricordarmi essere 22 il dividendo; prendo per divisore il doppio 4 della radice, e dividendo 22 per 4, scrivo 5 al quoziente; moltiplico il divisore pel quoziente, il prodotto è 20, cui aggiungo il quadrato del quoziente, in questa maniera $\frac{20}{25}$, e la somma 225 sottratta da 228 mi dà 3 di resto, che scrivo come si vede; quindi la radice cercata è 25 con un resto 3, il quale indica che il numero proposto sarebbe un quadrato perfetto, se se ne to-

togliesse via 3. Per fare la prova di questa operazione, innalzo 25 al quadrato, ho 625, a questo numero aggiungo 3, che mi dà il proposto 628.

* 32. Allorchè non si possa avere una radice esatta, si potrà averla almeno per approssimazione. Ma pria di far vedere come si possa riuscirvi, osserveremo che moltiplicando il quadrato di un numero per 100, si rende la radice di lui solamente 10 volte maggiore, e che moltiplicando il quadrato per 10000, si fa diventar la radice 100 volte solamente maggiore. Quindi moltiplicando 9 per 100, oppure (ch'è lo stesso) aggiungendo due zeri a 9, si ha 900, la cui radice è 30; ora 30 è 10 volte più grande di 3 radice di 9. Parimente moltiplicando 9 per 10000, oppure (ch'è lo stesso) aggiungendo quattro zero a 9, si ha 90000, la cui radice è 300, numero 100 volte più grande di 3. Ciò posto supponghiamo che si domandi la radice di 15; aggiungo due zero per avere 1500, e spartendo cotesto numero in membri, come abbiam detto di sopra, prendo la radice del quadrato più grande contenuto nel primo membro 15, cioè di 9, e scrivo 3 alla radice. Innalzo 3 a quadrato, levo via il risultato 9 da 15, resta 6. A lato calo il seguente membro 00, e mettendo un punto sotto la prima cifra di questo membro, divido 60 per 6, dop-

15, 00	38
9	6
600	
544	
56	

doppio della prima cifra della radice; eſſendo troppo grande il quoziente 9, metto 8 alla radice. Moltiplicando il diviſore pel quoziente, ed aggiungendo il quadrato del quoziente, avanzando di una fila, trovo 544, il quale dibattuto da 600 reſta 56. Se ſi bramaſſe avere una radice più approſſimata, ſi dovrebbero aggiungere ancora due zero di più. Ma non eſſendo 15 un quadrato perfetto, non ſi può trovarne una radice eſatta. Coll'aver moltiplicato 15 per 100, abbiam renduto la ſua radice 10 volte maggiore, laonde convien dividerla per 10 onde avere $\frac{38}{10} = 3 + \frac{8}{10} = 3.8$ radice approſſimata che non differiſce ſennon di $\frac{1}{10}$ dalla vera.

* Se ſi voleſſe avere il cubo di 25, ſi prenderà dapprima il quadrato 625 di cotal numero, e moltiplicando 625 per 25, il riſultato 15625 ſarà il cubo cercato. Lo ſteſſo ſi troverà eziandio prendendo prima il cubo della prima cifra 2, ch'è 8; poſcia il triplo prodotto del quadrato della prima cifra per la ſeconda 5; in terzo luogo il triplo prodotto della prima cifra pel quadrato della ſeconda, e finalmente il cubo della ſeconda, avvertendo di avanzare ciaſcuna volta una fila verſo la deſtra; facendo poſcia l'addizione, tro-

```
   8...  Cubo della prima cifra 2.
  60..   Triplo prodotto di 4 per 5.
 150..   Triplo prodotto di 2 per 25.
 125..   Cubo di 5.
-----
15625
```

verassi il medesimo risultato che il sopraddetto. Se nel numero proposto vi fossero tre cifre, si continuerà allo stesso modo considerando le due prime cifre come se non ne formassero che una; laonde prenderassi di più il triplo prodotto del quadrato delle due prime per la terza, il triplo prodotto delle due prime pel quadrato della terza, finalmente il cubo della terza, e così di mano in mano per un maggior numero di cifre. Posto ciò, se si spartisce questo numero in membri, sicchè quello a destra contenga tre cifre, è manifesto in primo luogo che il cubo 8 della prima cifra 2 è contenuto nel primo membro a sinistra; in secondo luogo, che il triplo prodotto del quadrato della prima per la seconda è contenuto nella prima cifra 6 del secondo membro. Quando diciamo, che il triplo prodotto del quadrato della prima per la seconda è contenuto nella prima cifra 6 del secondo membro, intendiamo parlare dell' ultima cifra a destra di tal prodotto.

.15, 625	25
8	
7625	12

* Sia ora proposto di prendere la radice cubica di 15625. Avendo spartito questo numero in membri, com' abbiamo già detto, veggo dalla tavola de' cubi 8 essere il maggior cubo contenuto nel primo membro 15: prendo adunque la radice cubica di 8 ch' è 2, scrivo 2 alla radice, innalzando 2 al cubo, ho 8 che sottraggo da 15, per avere il resto 7, a fianco di cui abbasso il seguente membro;

bro; e mettendo un punto sotto la prima cifra 6 di tal membro, prendo per dividendo la prima cifra 6 del membro abbassato, unito al resto 7 del precedente (se non vi fosse alcun resto la sola cifra 6 sarebbe il dividendo;) prendo 12 per divisore, val a dire, il triplo del quadrato del primo termine della radice, dividendo 76 per 12, il quoziente è 6, ma il cubo di 26 essendo 17576 > 15625, non posso sottrarlo da questo secondo; diminuisco adunque il quoziente di un'unità, e siccome il cubo di 25 è = 15625, quantità che può essere sottratta dal numero proposto, scrivo 5 alla radice ch'è 25. Se vi fosse un altro membro, per trovare la terza cifra, prenderei per divisore il triplo del quadrato di 25, e per dividendo la prima cifra del terzo membro, unita al resto se ve ne fosse, innalzando poscia al cubo le tre prime cifre della radice; se il risultato esser potesse sottratto dalli tre primi membri, la cifra trovata saria buona, se no converrebbe diminuire successivamente il quoziente d'un'unità, finchè fosse possibile la sottrazione.

* Sia ora il numero 8489667, del quale si domandi la radice cubica. Si troverà, tenendo l'indicato metodo, 204 per radice con un resto 3.

* Se si desiderasse una radice più esatta, si aggiungeranno tre o al resto,

8, 489, 667	204
	12 Primo Divisore.
	1200 Secondo Divisore

ma

ma allora si dovrà dividere la radice trovata per o, ossia (ch'è lo stesso) si separerà una decimale sulla destra. Se si volesse una radice più approssimata, si aggiungeranno due volte tre o, vale a dire sei o, ed allora dovrannosi separare due decimali alla destra della radice. Se la radice non sembrasse ancora abbastanza approssimata, in vece di sei o, se ne aggiungeranno nove, o dodici, o quindici, ec., e si separeranno tante decimali alla destra quante volte avrannosi aggiunti tre o, ossia, si dividerà la radice trovata per l'unità seguita da altrettanti o per quante volte si avrà aggiunto tre o. Questa pratica hà per suo fondamento, che moltiplicando un cubo per mille, il che si fa aggiungendo tre zero al cubo, non si rende la sua radice cubica se non dieci volte più grande, e moltiplicandolo per un milione, o aggiungendo sei zero, non si rende la sua radice se non cento volte più grande, ec. Quindi moltiplicando 8 cubo di 2 per 1000, si ha 8000, la cui radice cubica è 20, numero dieci volte maggiore di 2, e moltiplicando 8 per 1000000, si ha 8000000, la cui radice cubica è 200, numero cento volte maggiore di 2, ec.

Delle Ragioni, e Proporzioni.

33. Una *ragione* o *rapporto*, nel senso che qui si dà a questa parola, è la maniera di essere di una grandezza per rapporto ad un' altra grandezza della medesima specie. La prima

ma delle grandezze che coll'altra si paragona, chiamasi *antecedente*, la seconda *conseguente*. Se si considera p. e. come *6* contenga 2, la ragione di *6* a 2 è la maniera con cui *6* contiene 2. Questa specie di ragione nominasi *geometrica*; suole scriversi così $\frac{6}{2}$ od anche in questo modo *6* : 2. La quantità *6* è l'antecedente, 2 il conseguente. Ma se si paragona *6* a 2 per sapere la differenza che passa tra l'antecedente *6* e il conseguente 2, ell'è in tal caso la *ragione aritmetica*, la quale scriviamo in questo modo *6* . 2, mettendo un punto tra l'antecedente e il conseguente. Scriviamo eziandio il prodotto di *6* per 2 in questa maniera *6* . 2; ma quando ciò avvenga sarà agevol cosa il vedere se trattasi di un prodotto, oppur d'una ragione aritmetica.

In una ragione geometrica l'antecedente può essere riguardato come il numeratore, e il conseguente come il denominatore d'una frazione. Quindi nella ragione geometrica di *6* a 2, o nel $\frac{6}{2}$, *6* è il dividendo ossia il numeratore, 2 il divisore ossia il denominatore. E' agevol cosa vedere che questa ragione vale 3; imperciocchè $\frac{6}{2} = 3$. Ma nella ragione aritmetica *6* . 2, trovasi il valore prendendo la differenza 4 tra l'antecedente *6* e il conseguente 2; ciò che si ottiene mediante la sottrazione.

34. L'unione di due ragioni geometriche uguali forma una *proporzione geometrica*, e l'u-

l'unione di due ragioni aritmetiche uguali dà una *proporzione aritmetica*. Le due ragioni 12 : 6 e 4 : 2 essendo uguali; perciocchè l'antecedente della prima contiene il suo conseguente in quella stessa maniera che l'antecedente della seconda contiene il suo, val a dire due volte; queste due ragioni formeranno una proporzione geometrica, la quale dovrassi indicare così $\frac{12}{6} = \frac{4}{2}$, oppure in questo modo 12 : 6 :: 4 : 2, e che nel discorso si enuncia dicendo, 12 sono a 6 come 4 a 2. Parimenti se la ragione di $a : b$ è uguale a quella di $c : d$, si avrà la proporzione geometrica $a:b::c:d$. Le ragioni aritmetiche 5 . 3, 6 . 4, uguali essendo, giacchè la differenza tra l'antecedente della prima, ed il suo conseguente è uguale a quella che v' ha fra l'antecedente della seconda e il suo conseguente, daranno una proporzione aritmetica che così dev' esser espressa 5 . 3 : 6 . 4, e che s'enunzia nel discorso dicendo, 5 sono a 3 aritmeticamente come 6 a 4. Allorchè si parla di una ragione o di una proporzione senza indicarla, s' intende sempre parlare della geometrica.

35. Due quantità, si dicono essere in ragione *inversa* di altre due, allorchè per fare la proporzione, lasciando le prime nello stato ove sono, bisogna rovesciar l'ordine delle due ultime. Così le grandezze 6 e 3, sono in ragione *rovesciata*, o in ragion *inversa* di 1 e 2, perchè per fare la proporzione, lasciando le quantità 6 e 3 nell'ordine medesimo,

con-

convien rovesciare l'ordine di 1 e 2, metter cioè 2 avanti 1 onde avere la proporzione 6:3::2:1. Due quantità si dicono essere eziandio in ragione *inversa* l'una dell'altra, allorchè l'una cresce nello stesso rapporto che l'altra decresce; val a dire p. e. se l'una diventando doppia, l'altra diventi subdupla, o due volte più piccola, la prima diventando tripla, quadrupla, ec. l'altra diventi subtripla, subquadrupla, ec. o reciprocamente. Supponghiamo p. e. che esprimendo per x la lunghezza di un pezzo di legno, per F la forza dello stesso legno, o lo sforzo cui può resistere, supponendo che abbia esso un piè di lunghezza, questa forza diminuisce allorchè cresce la lunghezza, di modo che allora quando la lunghezza della parte che dee sostenere lo sforzo, (un peso, o carico p. e.) diventa 2, 3, 4 ec. volte maggiore, la forza diventa 2, 3, 4 ec. volte minore; si avrà x in ragion inversa di F, ed F in ragion inversa di x. Ciò si esprime di questa maniera $F = \frac{1}{x}$, cioè che x essendo supposto 1 p. e. la forza sarà altresì $= \frac{1}{1} = 1$ (cioè capace di sostenere p. e. un peso di una libbra.) Se x diventa $= 2$, (o di due piedi) la forza sarà $= \frac{1}{2}$ cioè sarà la metà meno di prima, e non potrà sostenere che un peso metà più piccolo, o d'una mezza libbra, ec.

36. Egli è un principio certissimo, che in

ogni

ogni proporzione geometrica; *il prodotto degli estremi* (val a dire del primo e dell' ultimo termine) *è uguale a quello de' medj*, (cioè al prodotto del secondo e del terzo termine.) Ciò scorgesi chiaramente nella proporzione $12:6::4:2$; perciocchè $12 \times 2 = 6 \times 4 = 24$. Ciò ha luogo eziandio nelle proporzioni algebriche, di modo che supponendo $a = 12$; $b = 6$, $c = 4$ e $d = 2$, si avrà la proporzione $a:b::c:d$; ed $a \times d = b \times c$, o $ad = bc$. Parimenti, se $a = 24$; $b = 12$, $c = 6$, $d = 3$, si avrà $a:b::c:d$; ed $ad = bc$, o $24 \times 3 = 12 \times 6$; imperciocchè $24 \times 3 = 72 = 12 \times 6$. Generalmente, se il numero indicato per a contiene il numero indicato per b nella stessa maniera che il numero indicato per c contiene il numero indicato per d, si avrà la proporzione $a:b::c:d$, in cui il prodotto ad degli estremi sarà sempre uguale al prodotto bc de' medj.

37. Egli è altresì un altro principio adottato da tutti li Matematici; che *ogni qual volta si abbiano quattro quantità tali, che il prodotto delle estreme sia uguale a quello delle medie, queste quattro quantità sono proporzionali, val a dire si può farne una proporzione*. Così nelle quantità $12, 6, 4, 2$, il prodotto delle estreme 12 e 2 essendo uguale a quello delle medie 6 e 4, si avrà la proporzione $12:6::4:2$, ovvero $12:4::6:2$. Possiamo osservare che si può far cambiar luogo alli due termini medii, val a dire mettere il secondo nel sito del terzo, senza che cessi di avervi proporzione; imperocchè il prodotto

dotto 4×6 è lo stesso che il prodotto 6×4.

38. *Nelle proporzioni aritmetiche*, per contrario, *la somma degli estremi è sempre uguale a quella de' medj*; così nella proporzione aritmetica $7 . 5 : 4 . 2$, la somma degli estremi è 9 come lo è pure quella de' medii. Se la proporzione geometrica è *continua*, val a dire, se li due medj sono uguali, il prodotto degli estremi sarà uguale nella quadrato del termine del mezzo; quindi nel proporzione $18 : 6 :: 6 : 2$ il prodotto 18×2 è $= 36$ quadrato del termine medio 6; ed in una proporzione continua aritmetica la somma degli estremi è uguale al doppio del termine di mezzo; così nella proporzion continua aritmetica $10 . 7 : 7 . 4$, la somma 14 degli estremi è uguale al doppio di 7, termine del mezzo. Per indicare la proporzione continua $18 : 6 :: 6 : 2$ scrivesi $\div\!\!\div 18 : 6 : 2$, e si dice 18 è a 6 come 6 è a 2; di modo che *il termine medio 6 è uguale alla radice quadrata del prodotto 36 degli estremi*. *Ma nella proporzione continua aritmetica* $10 . 7 : 7 . 4$, che si scrive così $\div 10 . 7 . 4$, *il termine medio 7 è uguale alla metà della somma degli estremi*.

39. Per avere un termine x medio proporzionale tra due grandezze 2 ed 8 p. e., si prenderà la radice del prodotto di queste grandezze: imperciocchè si dee avere $\div\!\!\div 2 : x : 8$, o $2 : x :: x : 8$, e (36) $2 \times 8 = x \times x$, o $16 = xx$; e prendendo le radici $\sqrt{16} = \sqrt{xx}$, o $\sqrt{16} = x$, o $4 = x$. In fatti $2 : 4 :: 4 : 8$.

Per-

Per avere un medio proporzionale aritmetico tra due grandezze date, prendete la semi-somma di queste grandezze: quindi per avere un medio aritmetico y tra 10 e 6, prendete $y = \frac{10+6}{2} = \frac{16}{2} = 8$, ed avrete la proporzione continua aritmetica ÷ 10. 8. 6.

* 40. TEOREMA. *In una serie di ragioni uguali, la somma degli antecedenti è a quella de' conseguenti, come un antecedente è al suo conseguente.* Siano le ragioni uguali 12 : 6, 8 : 4, 2 : 1, nelle quali la somma 22 degli antecedenti è ad 11, somma de' conseguenti, come l'antecedente 12 è al conseguente 6, giacchè è manifesto che 22 contiene due volte 11, come 12 contiene due volte 6. La ragione per cui ciò avverrà sempre ell' è perchè ciascuna parte della somma 12 + 8 + 2 degli antecedenti contiene ciascuna parte corrispondente + 6 + 4 + 1 della somma de' conseguenti, in quel modo che un antecedente contiene il suo conseguente, e si ha sempre 12 + 8 + 2 : 6 + 4 + 1 :: 12 : 6.

41. Chiamasi *ragion composta* quella che risulta dalla moltiplicazione di due o più ragioni semplici, o come tali riguardate, moltiplicando gli antecedenti pegli antecedenti, e li conseguenti per li conseguenti: così moltiplicando le due ragioni 6 : 3, 2 : 1 l' una per l'altra, la ragione 6 X 2 : 3 X 1 o la ragione 12 : 3 sarà composta delle due ragioni ora dette, la prima delle quali vale 2 del pari che la seconda, e la ragion composta vale 4, qua-

quadrato di 2. Parimente il prodotto delle ragioni uguali $6:2$, $3:1$ è $18:2$, che val 9, quadrato di 3 che esprime il valore d'una delle ragioni componenti uguali. Ma pigliando li quadrati de' termini d'una delle ragioni componenti uguali, della prima p. e., avremo la ragione di $36:4$ che val 9; perciocchè 36 contiene 4 nove volte. Allorchè le ragioni componenti sono uguali, e non ve n'ha che due, la ragione si dice *duplicata*, ed essa ha lo stesso valore di quello che avrebbesi moltiplicando l'una di tali ragioni per se medesima, o pigliando li quadrati dell'antecedente e del conseguente. Per questa ragione dicono li Geometri che *li quadrati sono in ragione duplicata delle radici*; ed in oltre che le radici sono in ragione *sudduplicata* de' quadrati: così la ragione di $a^2:b^2$ è duplicata di quella di $a:b$, e quella di $a:b$ è sudduplicata di quella di $a^2:b^2$. Se $a=6$, e $b=2$, la ragione di $a^2:b^2$ sarà uguale a quella di $36:4$, e quella di $a:b$, sarà lo stesso che la ragione di $6:2$. Allorchè vi sono tre ragioni componenti uguali, la ragione che n'è composta si chiama *triplicata*; così moltiplicando le tre ragioni uguali $6:3$, $4:2$, $2:1$ l'una per l'altra, si avrà la ragione $6\times4\times2:3\times2\times1$, o $48:6$, che vale 8, e ch'è uguale a quella che v'ha tra li cubi de' termini d'una delle ragioni componenti, p. e. dell'ultima; perciocchè il cubo di 2 è 8, e quello di 1 è 1; ora la ragione di $8:1$ è $=8$. Parimenti la ragione de' cubi $a^3:b^3$ è triplicata di quella

delle radici cubiche $a:b$, e la ragione di $a:b$, chiamasi *suttriplicata* del a ragione di $a^3:b^3$.

42. Una ragione *continua* geometrica che ha più di tre termini, forma una *progressione geometrica*. Tale si è la seguente 48:24:: 24:12::12:6::6:3, la quale dee scriversi in questo modo ∺ 48:24:12:6:3. Se la proporzione continua avente più di tre termini è aritmetica, si ha una progressione aritmetica. Così li termini 0, 1, 2, 3, 4, 5 formano una progressione aritmetica la quale di questo modo si scrive ÷ 0.1.2.3.4.5. Parimenti la serie ÷ 20.15.10.5.0, è una progressione aritmetica in cui ciascun termine sorpassa il susseguente della differenza 5 che regna nella progressione.

Della Regola di Tre, o sia del Tre.

43. Questa regola così si appella, perchè col mezzo di tre termini trovasene un quarto ch'era ignoto. Come se venisse richiesto il quarto termine d'una proporzione i cui tre termini fossero 12, 6, e 4; nominando x il termine ignoto, per la natura della proporzione, avrebbesi $12:6::4:x$, e pel principio di sopra accennato (36), il prodotto $12.x$ degli estremi sarebbe uguale al prodotto 24 de' medii. Ma uguali essendo questi prodotti, uguali ancora rimarranno se si dividono per 12, dunque si avrà $\frac{12.x}{12}=\frac{24}{12}$, o $x=2$; val

a di-

a dire, che *per trovare il quarto termine d' una proporzione di cui gli altri tre sono noti; convien dividere il prodotto de' medii per l' estremo noto*. Così pure se nella proporzione $a:b::c:x$, noti sono li tre primi termini, si avrà $x = \frac{b.c}{a}$, vale a dire; che si troverà l'ultimo termine x dividendo il prodotto bc de' medii per l'estremo noto a. Se fosse la proporzione $a:b::x:c$; si avrebbe $ac = bx$, pel suaccennato principio (36), e dividendo questi prodotti uguali per la stessa quantità b, si troverebbe $\frac{ac}{b} = \frac{bx}{b} = x$; val a dire, che affin di trovare il medio ignoto si dee dividere il prodotto degli estremi pel medio noto.

44. ESEMPIO I. 30 granatieri hanno fatto 100 tese di trincea in un giorno, quante ne farebbero 120 granatieri nello stesso tempo? E' manifesto essere li numeri de' granatieri tra loro come le tese della trincea che eglino fanno. Laonde si dirà 30 granatieri sono a 120 granatieri, come il numero 100 di tese fatte da' 30 granatieri sono al numero x cercato di tese che farebbero li 120 granatieri; $30:120::100:x = \frac{120 \times 100}{30} = \frac{12000}{30} = 400$; val a dire, che li 120 granatieri avrebbero fatto 400 tese nel tempo stesso in cui 30 granatieri ne hanno fatto 100. Se la questione non contiene che tre termini noti, ed uno incognito, siccome la precedente, la regola del tre nominasi *semplice*; *composta* poi si appel-

 la

la quando contiene più di tre termini noti, come nell'esempio seguente.

45. ESEMPIO II. 10 muratori, lavorando in 3 giorni 7 ore per giorno, hanno fatto 30 tese di muro, quante tese di muro farebbero eglino 6 muratori lavorando 4 giorni, 5 ore per giorno? Per risolvere questo quesito, disponete li termini come qui vedete, indi moltiplicate li 10 primi muratori per li giorni e le ore che ad essi corrispondono.

$$\begin{array}{ccccc} 10^{m} & & 6^{m} & & \\ 3^{g} & : & 4^{g} & :: & 30^{t} : x \\ 7 & & 5 & & \end{array}$$

$$210 : 120 :: 30 : x = 17 + \frac{30}{210}$$

Moltiplicando 10 per 3, avrete 30, e moltiplicando 30 per 7, troverete 210, che sarà il primo termine della proporzione. Parimenti moltiplicando 6 per 4 e per 5, avrete 120, che sarà il secondo termine della proporzione. Fate dunque $210 : 120 :: 30 : x = \frac{3600}{210} = 17 + \frac{30}{210} = 17 + \frac{1}{7}$, dividendo il numeratore e il denominatore della frazione $\frac{30}{210}$ per 30, il che (n.° 10) non può cangiarne il valore. Quindi li 6 muratori farebbero in 4 giorni, lavorando 5 ore per giorno, 17 tese ed $\frac{1}{7}$ di tesa di muro. La ragione di questa operazione è facilissima; perchè 10 muratori che lavorano 7 ore, fanno lo stesso lavoro di un sol muratore che lavorasse 7 volte 10 ore, ossia 70 ore, e 10 muratori che lavorano in 3 giorni 7 ore per giorno fanno 210 ore di lavoro, e

deb-

debbono essere riguardati come 210 muratori che lavorassero per un'ora; così pure 6 muratori che lavorano in 4 giorni 5 ore per giorno, fanno lo stesso lavoro che 120 muratori che lavorassero un'ora. Per questa ragione possiam dire 210 ore di lavoro sono a 120 ore di lavoro come 30 tese di opera prodotte da 210 ore di lavoro sono al numero x di tese che produr debbono le 120 ore di lavoro.

46. La regola di tre è qualche volta *inversa*, il che si rileva allorchè li due primi termini *omogenei* o della stessa specie, non sono tra loro come li due ultimi. Supponiamo p. e. che proposta venga tale questione: 10 uomini hanno fatto una fossa in 4 giorni, quanti giorni sarebbero stati impiegati da 20 uomini per fare la fossa medesima? Se volete fare questa regola di tre: 10 uomini sono a 20 uomini come 4 giorni impiegati dalli primi uomini sono alli giorni che impiegati sarebbonsi dalli 20 uomini, o $10:20::4:x$, troverete $x=8$, vale a dire, che 20 uomini impiegherebbero due volte più giorni che 10 uomini per far il medesimo lavoro, lo che è assurdo; dovete dunque disporre in guisa li termini, che li primi uomini e li giorni in cui lavorano stano li due estremi, o li due medii della proporzione. Laonde potrete fare $20:10::4:x=\frac{10\times4}{20}=\frac{40}{20}=2$; cioè che li 20 uomini non avrebbero impiegati se non due giorni a fare la fossa; lo che è evidentemen-

 te

te manifesto; imperciocchè se vi sono due volte più uomini, devono impiegare due volte meno di tempo.

47. Le regole dette di *compagnia*, si risolvono in altrettante regole di tre quanti vi sono di associati.

48. Esempio. Tre Mercanti hanno messo un capitale di 1200 luigi, sopra il quale hanno guadagnato 300 luigi, il primo ha messo 600 luigi, il secondo 400 ed il terzo 200; quanto toccherà egli a ciascuno? Fate le qui sotto regole di tre, dicendo, la posta totale è al guadagno totale, come la posta di ciascheduno è al guadagno che gli tocca, ed avrete 150 pel primo, 100 pel secondo, e 50 per il terzo.

$$1200 : 300 :: 600 : x = 150$$
$$1200 : 300 :: 400 : z = 100$$
$$1200 : 300 :: 200 : y = 50$$

Altro Esempio. Quattro Mercanti hanno messo un capitale di 2000 luigi, sopra del quale hanno guadagnati 1200 luigi; il primo ha messo 1000 luigi, il secondo 500, il terzo 400, ed il quarto 100, quanto tocca egli a ciascheduno? Fate le quattro regole di tre seguenti, e troverete essere il guadagno del primo 600 luigi, quello del secondo 300, quello del terzo 240, e quello del quarto 60, lo che vi sarà agevole di verificare.

$$2000 : 1200 :: 1000 : t = 600$$
$$2000 : 1200 :: 500 : x = 300$$
$$2000 : 1200 :: 400 : y = 240$$
$$2000 : 1200 :: 100 : z = 60$$

49. Le operazioni che si praticano per le let-

tere di cambio dipendono anch' esse dalla regola di tre.

Esempio I. Si danno ordinariamente 4 fiorini di Lilla per 5 lire di Francia, e si domanda una cambiale di 1200 fiorini sopra Lilla, quanto fa mestieri di contare a Parigi per avere tal cambiale, supponendo che il Banchiere non voglia guadagnar nulla sopra colui che la domanda. Fate la proporzion seguente: 4 fiorini sono a 5 lire di Francia come 1200 fiorini sono al numero delle lire che si debbono contare, o $4:5::1200:x=\frac{6000}{4}=1500$; vale a dire, che bisogna contare 1500 lire a Parigi.

In Inghilterra, la lira sterlina vale 20 soldi sterlini, ed il soldo sterlino vale 12 danari sterlini.

Esempio I. Supposto il cambio a 31 danaro sterlino per uno scudo di Francia, quanti deo contarne Tizio a Londra per avere una cambiale sopra Parigi di 1200 lire di Francia? Fate la regola di tre seguente: 3 lire sono a 31 danaro sterlino come 1200 lire sono al numero de' danari sterlini che bisogna contare, o $3:31::1200:x=\frac{31\times1200}{3}=\frac{37200}{3}=12400$; vale a dire, che bisogna contare 12400 danari sterlini. Valendo il soldo sterlino 12 danari, se dividete il risultato per 12, vi sarà facile trovare 1033 soldi sterlini più 4 danari sterlini, e dividendo 1033 per 20, avrete 51 e 13 di resto; laonde bisogna contare 51 lira 13 soldi 4 danari sterlini.

50. Dalli Geometri appellansi *logaritmi*, certi numeri in progressione aritmetica corrispondenti a certi altri termini in progressione geometrica. Siano a cagione d'esempio le progressioni A, B seguenti; li

∺ 1 : 2 : 4 : 8 : *16* : *32* : *64* : *128* : ec. A

÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . *6* . *7* . ec. B

termini della progressione aritmetica B potranno essere riguardati come logaritmi di quelli della progressione geometrica A. Col moltiplicare il secondo termine della progressione A pel quinto, si trova 32, ed aggiungendo il logaritmo del moltiplicando a quello del moltiplicatore si trova 5, logaritmo del prodotto. Ciò può bastare a far comprendere come, per via de' logaritmi, si possa cangiare la moltiplicazione in addizione; e già trovansi delle tavole che contengono li logaritmi de' numeri da 1 infino a 20000 e più là ancora, ed a lato di ciascun logaritmo, vi si vede il numero corrispondente e reciprocamente. Cercando adunque nelle tavole la somma de' logaritmi p. e. di 7 e di 57, troverete a lato di tale logaritmo un numero che sarà il prodotto di 7 per 57. Se dividete *64* per 4, avrete *16* per quoziente; ma levando via nella progressione B il logaritmo 2 del divisore dal logaritmo *6* del dividendo, avrete 4, logaritmo del quoziente *16*; e così li logaritmi riducono la divisione in sottrazione.

Per trovare il quarto termine d'una proporzione geometrica per via de' logaritmi, somma-

marete li logaritmi de' due medii, e ne leverete via quello dell'estremo noto, il resto sarà logaritmo dell'estremo cercato. Supponghiamo che venga dimandato il quarto termine di questa proporzione $2:4::32:x$; aggiungo insieme 2, e 5, logaritmi di 4 e di 32; dalla somma 7 levo via 1, logaritmo di 2, il resto *6* è il logaritmo del numero cercato *64*. Diffatti, si ha la proporzione $2:4::32:64$.

* Nelle tavole de' logaritmi hanno li Geometri fatto uso delle decimali. In quelle dell' Ab. della Caille che sono comodissime, li logaritmi hanno sei decimali; e vanno fino a 20000; trovansene di quelle che giungono fino a 100000. In cotali tavole si suppose una progressione geometrica di un grandissimo numero di termini, parecchi de' quali contengono frazioni; e si è pigliata una progressione aritmetica di altrettanti termini per rappresentare li logaritmi de' numeri che formano la progressione geometrica. Ma in seguito si ha soppresso nella progressione geometrica tutti li numeri non interi, e parimenti non si ha tenuto nella progressione aritmetica che li logaritmi de numeri interi. A lato di ciascun numero si trova il suo logaritmo.

Per fare una regola di tre per via di logaritmi, si sommeranno, come abbiam detto qui sopra, li logaritmi de' termini medii, e dalla lor somma si sottrarrà quello dell' estremo noto, il resto sarà il logaritmo dell'estremo cercato; cercando questo logaritmo nelle tavole si troverà a fianco il numero cercato. Così

per-

per trovare il quarto termine di questa proporzione geometrica $341:428::5797:x$, aggiungo li logaritmi de' medii che trovo nelle tavole, dalla lor somma sottraggo il logaritmo del primo termine, e mi resta il logaritmo dell'ultimo termine. Cercando questo logaritmo nelle tavole trovo a lato 7276, numero cercato. La ragione di tutto ciò ella è, che per avere il quarto termine di una progressione geometrica di cui sono noti li medii, ed uno degli estremi, bisogna dividere il prodotto de' medii per l'estremo noto. Se fosse noto un medio, ed ambidue gli estremi, si dovrebbe levar via dalla somma de' logaritmi degli estremi il logaritmo del medio noto, e così avrebbesi il logaritmo del medio cercato.

2 . 631444	log. di 428
3 . 763203	log. di 5797
6 . 394647	somma
2 . 532754	log. di 341
3 . 861893,	log. di $x = 7276$

Delle Equazioni.

51. Equazione non è altro che la ragione di uguaglianza che trovasi tra due quantità; così le quantità $5+3$ e 8 essendo uguali, si ha l'equazione $5+3=8$. Parimenti se la quantità $a+b$ è uguale alla quantità c, si avrà l'equazione $a+b=c$. Parimenti se si domandi un numero il quale moltiplicato per 10, e diviso per 7 dia 20, chiamando x questo numero incognito, moltiplicandolo per 10,

avrà

avrò $10x$, e dividendolo per 7 avrò $\frac{10x}{7}$, quantità che dev'essere uguale a 20 per la supposizione; dunque si ha l'equazione $\frac{10x}{7} = 20$. Ora perchè due quantità uguali rimaner debbono uguali sia moltiplicandole, sia dividendole per altre quantità uguali, moltiplico da una parte e dall'altra 7 ed ho $\frac{70x}{7} = 140$, o $10x = 140$, e dividendo da una parte e dall'altra per 10, ne viene $\frac{10x}{10} = \frac{140}{10}$, o $x = 14$; quindi il numero cercato è 14. L'oggetto delle equazioni è il far conoscere il valore delle quantità ignote che entrano in esse equazioni.

Eccovi un principio fecondissimo del quale fanno li Matematici un grand'uso: *Due quantità uguali resteranno uguali se verranno loro aggiunte, o ne saranno levate via delle quantità uguali, se saranno moltiplicate o divise per altre quantità uguali, se saranno innalzate alla medesima potenza, o se ne sarà presa la medesima radice*. Un tale principio non ha bisogno di dimostrazione.

52. Supponghiamo ora che venga proposto questo problema. *Due cavalli, l'uno bianco, l'altro nero, costarono insieme 12 luigi; il nero costa il doppio del bianco, qual è il prezzo di ciascheduno?* Eccovi il modo da ritrovare il prezzo di ciascuno di questi cavalli. Nomino x il prezzo del cavallo bianco. Poichè il nero costa due volte di più, il

suo

suo prezzo sarà $2x$; ma questi due prezzi insieme vagliono 12 luigi i quali dinoto per a; dunque $x+2x$ vagliono quanto a. Si ha dunque l'equazione $x+2x=a$, ossia (giacchè una volta x e due volte x vagliono 3 volte x) $3x=a$. Giacchè $3x$ vagliono a, se si divide $3x$ ed a per 3, li quozienti saranno uguali; dunque $\frac{3x}{3}=\frac{a}{3}$; ora $\frac{3x}{3}=x$; dunque $x=\frac{a}{3}=\frac{12}{3}=4$; vale a dire, che il cavallo bianco costa 4 luigi, e per conseguenza il cavallo nero che costa il doppio, costa 8 luigi, e li due cavalli insieme costano 12 luigi.

53. PROBLEMA: *Un Padre avendo fatto testamento lascia alla sua vedova incinta li $\frac{2}{3}$ della sua facoltà, ed $\frac{1}{3}$ a sua figliuola, se ella partorisse una femmina; ma se fosse un maschio lascia $\frac{1}{3}$ alla madre, e li $\frac{2}{3}$ al figliuolo; ora succede ch' ella partorisce un maschio ed una femmina, quanto dee toccare a ciascheduno? La facoltà del Padre è di 700000 lire*. Egli è manifesto intendere il padre che abbia la madre il doppio della figlia, ed il figliuolo abbia il doppio della madre; laonde se si nomina x la parte della figlia, $2x$ sarà quella della madre; ma quella del figliuolo dev'esser il doppio di quella della madre, dunque sarà $=4x$, e le tre parti sommate insieme daranno $7x$; perciò questa quantità dev'esser uguale alla facoltà del padre, la quale chiamo a, vale a dire che avremo

l'equa-

l'equazione $7x=a$. Se divido le quantità uguali $7x$ ed a per 7; li quozienti saranno manifestamente uguali; quindi $\frac{7x}{7}=\frac{a}{7}$, ossia $x=\frac{a}{7}$. Ma $a=700000$ lire, e $\frac{700000}{7}=100000$; dunque la porzione x della figlia è di 100000 lire, quella della madre è di 200000 lire, e quella del figliuolo di 400000 lire.

54. PROBLEMA. *Tengo in una mano*, disse un padre al suo figliuolo, *un numero pari di scudi, e nell' altra uno dispari; voi tutti gli avrete se indovinate ove è il numero dispari*. Raddoppiate col pensiero, rispose il figlio al padre, il numero della mano sinistra, e sommate il risultato (parimenti col pensiero) col numero della destra, e mi dite soltanto se la somma è numero pari oppure dispari. Avendo il padre risposto essere dispari la somma, disse con sicurezza il figlio che il numero dispari trovavasi nella destra, ed era vero; si domanda come abbia egli potuto indovinarlo. Conviene osservare che il doppio di un numero pari o dispari è sempre pari; perciò se aggiungendo il doppio del numero della destra a quello della sinistra, il risultato è dispari, è necessario che sia dispari il numero della destra. Se per contrario il risultato fosse pari, pari sarebbe anch'esso il numero della destra. Sia 4 il numero della sinistra e 3 quello della destra, il doppio della sinistra sarà 8, che aggiunto a 3 darà 11, numero dispari. Sia ora 5 quello della sinistra e 4

quello

quello destra, il doppio del numero della sinistra unito a quello della destra darà 14, numero pari; laonde il numero pari sarà in tal caso nella destra.

55. PROBLEMA: *Ho trenta scudi in ambe le mie mani*, dice uno zio a suo nipote, *che a voi donerò se indovinate quanti ve ne sono in ciascuna in particolare; vi dirò solo esservene 8 di più nella destra che nella sinistra*. Per indovinar ciò, il nipote riflette, che conoscendosi la somma di due quantità e la loro differenza, la maggiore è uguale alla metà della somma più la metà della differenza; e la minore uguale alla metà della somma meno la metà della differenza. Perciò essendo la somma degli scudi che sono in ambe le mani $= 30$; e la differenza $= 8$, la quantità maggiore (che si trova nella destra) dev' essere $= \frac{30}{2} + \frac{8}{2} - 15 + 4 = 19$; e la minore dev' essere $= 15 - 4 = 11$. Vi erano adunque 19 scudi nella mano destra, ed 11 nella sinistra.

56. Una tale proprietà delle equazioni può servire a far risolvere il quesito presente: *In due scuderie si trovano 1200 cavalli, ma 300 di più ne sono in quella che è a destra che nell'altra a sinistra, quanti ve ne sono eglino in ciascheduna?* E' evidente dover essere il numero de' cavalli di quella a destra $= \frac{1200}{2} + \frac{300}{2} = 600 + 150 = 750$, e quello dell'altra a sinistra $= 600 - 150 = 450$.

57. Ci sono certi problemi capaci di infinite soluzioni, per risolvere i quali ci sono meno equazioni che incognite.

58. Se p. e. si domandassero due numeri x ed y la cui somma fosse 10, si avrebbe l' equazione $x+y=10$, o $x=10-y$ levando via y dalli due membri dell'equazione; lo che giusta il suindicato principio non distrugge per verun modo l' uguaglianza. A risolvere questo problema supponghiamo $y=9$, per così avere $x=10-9=1$. Se supponghiamo $y=8$, avremo $x=2$. In generale si scorge avere questo problema infinite soluzioni; perchè si può supporre y uguale ad un numero negativo, o positivo, intero, o frazionale; quindi possiamo fare un' infinità di supposizioni arbitrarie. Ma se si volesse che li due numeri x ed y fossero interi e positivi, è evidente che non sarebbervi se non 9 soluzioni possibili, e che potrebbesi soltanto supporre $y=1$, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Li problemi di questa fatta si chiamano *indeterminati*, e in caso che si aggiungessero delle condizioni a' problemi indeterminati, allora prenderebbero il nome di *semi-determinati*.

59. ESEMPIO I. Si domandano due numeri di luigi, l' uno che indico per x, e l' altro per y, tali che il triplo del primo numero, più il doppio del secondo dia 20, o tali che abbiasi $3x+2y=20$. Supponete x uguale a qualcuno de' numeri 2, 4, 6, ed y uguale a qualcuno de' numeri 7, 4, 1.

Ora

Ora se prendete 2 per il valore del numero x, e 7 per il valore del numero y, voi avrete il problema risolto; perciocchè il triplo di 2 unito al doppio di 7 dà 20.

Se prendete 4 per il valore d' x, ed il numero corrispondente 4 pel valore d' y il problema sarà parimenti risolto. Troverete eziandio che 6 ed 1 danno anch' essi risolto il problema; laonde questo problema ha tre soluzioni.

$x = 2$,	$y = 7$
4	4
6	1

60. ESEMPIO II. Un Officiale credendosi troppo debole per attaccare il nemico, prega un altro Officiale suo amico di inviargli 10 soldati del suo distaccamento; ma allora il distaccamento del primo Officiale si ritrova triplo di quello del secondo; si domanda quale era dapprima il numero de' soldati di ciascun distaccamento.

Nominate x il numero de' soldati del primo distaccamento, y il numero del secondo, e supponete che sia x rappresentato da qualcuno dei termini della progressione aritmetica, che qui sotto si vede, ed y da qualcuno dei termini dell' altra progressione aritmetica corrispondente, le quali progressioni è agevol continuare all' infinito. La differenza della progressione dei valori di y è 1, e quella della progressione dei valori di x è 3. Ciò posto, se si prendono due numeri corrispondenti in coteste progressioni p. e. il numero

15 ed il numero 5, essi risolveranno il problema.

Imperciocchè se da 15 si sottraggon 10, e se gli aggiungo a 5, il valore del distaccamento y diverrà 5, ma l' altro distaccamento diverrà 15: ora 15 è triplo di 5.

$x = 2$,	$y = 14$
5	15
8	16
11	17
&c.	&c.

Parimenti sarà agevol vedere che li numeri 8 e 16 risolvono il problema, e così di seguito. Non si può dunque sapere di quanti soldati fosse precisamente ciascun distaccamento; si sa soltanto che il primo distaccamento conteneva o 2, o 5, o 8 ec. soldati, e che il secondo ne conteneva o 14, o 15, o 16 ec. Se il primo distaccamento ne conteneva 2, in tal caso ne conteneva l' altro 14. Se il primo ne contenea 5, il secondo dovea contenerne 15. Se il primo ne conteneva 8, dovea il secondo essere composto di 16, e così di seguito.

ESEMPIO III. Trenta animali costarono 75 scudi: li montoni costarono 5 scudi l' uno, le pecore 3, e gli agnelli 2; si domanda il numero x de' montoni, il numero y delle pecore, ed il numero z degli agnelli. Se voi date ad x, ad y, e lo z li valori che veggonsi nella tavola qui sotto, sarà risolto il problema. Ma allora è mestieri di prendere tre numeri corrispondenti. Perciò se si prende il secondo numero nella progressione aritmetica che rappresenta li valori di z, sarà mestieri di prendere altresì il secondo termi-

ne nelle progressioni aritmetiche che rappresentano li valori di y, e di z. Diffatti la somma delli tre numeri

$x = 4$;	$y = 3$,	$z = 23$
3	6	21
2	9	19
1	12	17

3, 6, 21 dà 30. D' altra parte 3 montoni a 5 scudi l' uno danno 15 scudi; 6 pecore a 3 scudi l' una danno 18 scudi, e 21 agnello a 2 scudi l' uno vagliono 42 scudi, e la somma totale sarà 75 scudi come è richiesto dal problema.

Se venisse proposta quest' altra questione: Sono state comprate 30 bottiglie di varii vini per 75 lire. Il vino di Borgogna costa 5 lire la bottiglia, il vino di Sciampagna 3 lire; e quello di Cahors 2 lire. Si domanda quante bottiglie vi sono di ciascun vino. Nominando x il numero di bottiglie di vino di Borgogna, y il numero di bottiglie di vino di Sciampagna e z il numero di vino di Cahors, si troverà la soluzione medesima; trovata nell' esempio antecedente. Quindi se vi erano 4 bottiglie di vino di Borgogna, dovean esservene 3 di quello di Sciampagna, e 23 di vino di Cahors. Ma se vi erano 2 bottiglie del primo vino, avranno dovuto essere 9 quelle del secondo, e 19 quelle del terzo, ec.

62. ESEMPIO IV. Si ricercano due numeri interi e positivi x ed y, tali che la loro somma sia uguale al quadrato del secondo. Potrete risolvere questo problema facendo

$x =$

$x = y \times (y - 1)$; val a dire, supponendo il primo numero uguale al prodotto del secondo moltiplicato per se medesimo diminuito dell' unità. Se dunque piglierete per y un numero qualunque intero e positivo maggiore che 1, troverete un valore di x che risolverà la questione: Supponghiamo p. e. $y = 5$; allora x sarà uguale a 5 moltiplicato per 4: Ora la somma $x + y = 20 + 5$ è uguale a 25; quadrato di 5; ma non si può già suppor $y = 1$; perchè allora si avrebbe $x = y \times (y - 1) = 1 \times (1 - 1) = 1 \times (0) = 0$.

63. ESEMPIO V. Si domandano due numeri interi e positivi x ed y; tali che la somma de' loro quadrati sia uguale al cubo del secondo: Se supponete $x = y \times \sqrt{(y - 1)}$, poichè y è numero quadrato accresciuto dell' unità; sarà risolto il problema; vale a dire; che il numero x dev' essere uguale al prodotto del secondo numero moltiplicato per la $\sqrt{}$ di questo secondo numero diminuito dell' unità; ma il secondo numero dev' essere positivo, ed in oltre dev' essere un quadrato aumentato dell' unità:

Prendiamo p. e. invece di y il numero quadrato 4 accresciuto dell' unità, ossia supponghiamo $y = 5$, e moltiplichiamo 5 per 2, radice di $5 - 1$, o qui di $y - 1$, avremo $x = 10$: Ma il quadrato di 10 è 100, quello di 5 è 25; e la somma 125 di questi due quadrati è uguale al cubo del secondo numero 5. Se supponghiamo $y = 9 + 1 = 10$, troveremo $x = 30$; e la somma del quadrato di x, e del quadrato di

x sarà 1000 cubo di y ossia di 10.

64. OSSERVAZIONE. Alcune volte così fatti problemi sono impossibili, e indarno ne domandano gli ignoranti le soluzioni.

65. ESEMPIO VI. Sia proposto di disporre 20 cavalli in 5 scuderie, di maniera che ve ne abbia un numero dispari in ciascuna. Per la natura de' numeri, la somma di due numeri dispari è un numero pari; dunque le due prime scuderie prese insieme contener debbono un numero pari di cavalli. Per la ragione medesima, la somma de' cavalli contenuti nella terza e quarta scuderie prese insieme dev' essere un numero pari. Laonde il numero de' cavalli contenuti nelle quattro prime scuderie sarà pari; e questo numero aggiunto che sia al numero dispari contenuto nella quinta scuderia, darà necessariamente un numero dispari, stante che la somma di due numeri l'uno pari l'altro dispari, è un numero dispari. Dunque il numero de' cavalli contenuti nelle cinque scuderie sarà dispari, mentre che dev' essere pari per la natura del problema, il quale per conseguenza è impossibile. In generale la somma di un numero dispari di numeri dispari interi e positivi, essere dovendo necessariamente un numero dispari, ne segue non essere possibile il disporre un numero pari di cavalli, p. e. 100 in un numero dispari di scuderie, come 7 p. e., talchè ve n' abbia un numero dispari in ciascheduna.

Dell'

Dell' Infinito.

66. Intendo per *quantità infinita*, o per *infinito* una quantità maggiore che alcuna quantità data; vale a dire, una quantità maggiore che alcuna quantità assegnabile in numeri. Accennasi l'infinito per via del carattere ∞. Il prodotto $\infty \times \infty$ dell' infinito per l' infinito, che si dinota per ∞^2, si chiama un infinito del second' ordine. L' infinito del second' ordine moltiplicato per l'infinito del prim' ordine, o per ∞ dà $\infty^2 \times \infty = \infty^3$; che infinito chiamasi del terz' ordine. L' infinito del quart' ordine segnasi in questo modo ∞^4, ec. L' *infinitamente piccolo del prim' ordine* è una quantità minore di qualunque altra quantità assegnabile; questo lo indichiamo così $\frac{1}{\infty}$.
Il prodotto di questo infinitamente piccolo moltiplicato per se medesimo dà $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1 \cdot 1}{\infty \cdot \infty} = \frac{1}{\infty^2}$ che chiamasi infinitamente piccolo del second' ordine; l' infinitamente piccolo del terzo ordine si scrive così $\frac{1}{\infty^3}$, ec. Li geometri riguardano siccome uguali due quantità finite che non differiscono tra loro che di un infinitamente piccolo del primo, o di altr'ordine, così $3 + \frac{1}{\infty} = 3$. Diffatti, si può in tal caso riguardare $\frac{1}{\infty}$ come se fosse $= 0$, perchè l'errore che potesse risultarne nel calcolo sarebbe tutt'al più inassegnabile. Ma chi mai potrà distinguere un tale errore da un error nulla o $= 0$?

DELLA GEOMETRIA.

1. LA Geometria è la ſcienza dell' *eſtenſione*. Nell' eſtenſione ſi può conſiderare la lunghezza, la larghezza, e la profondità. La *linea* è l'eſtenſione in lunghezza. La ſuperficie è l'eſtenſione in lunghezza, e larghezza. Il *ſolido* è l'eſtenſione in lunghezza, larghezza e profondità (*a*). Benchè egli non eſiſta alcuno ſpazio ſenza le tre dimenſioni, lunghezza, larghezza, e profondità, tuttavia poſſiam conſiderare la lunghezza ſenza la larghezza, e la profondità, perchè ci rappreſentiam beniſſimo alla mente la lunghezza di un viale ſenza attendere alla ſua larghezza. Parimenti ci rappreſentiamo alla mente la ſuperficie di un campo ſenza badare alla profondità delle terre. L'eſtremità di una linea chiamaſi un *punto*, il quale non ha parti, perchè l' eſtremità eſſen-

(*a*) Il *ſolido fiſico* oſſia il corpo è un aggregato di parti materiali; ma il *ſolido geometrico* non contiene che puro ſpazio ſenza materia; tale ſaria lo ſpazio che avrebbevi in una botte ſe non vi foſſe nè vino, nè aria, nè alcun'altra materia.

sendo della linea o della lunghezza, esso non è lungo; esso non è nemmen largo nè profondo sendo che concepiamo la linea senza larghezza, e senza profondità. Tuttavia per ajutare la fantasia si può rappresentarsi alla mente il punto geometrico come avente una lunghezza, larghezza e profondità infinitamente picciole.

2. Divideremo la Geometria in tre parti; nella prima parleremo delle linee, nella seconda delle superficie, e nella terza de' solidi. Aggiungeremo in fine un trattatello di Geometria pratica per far sentire l' utilità delle Matematiche.

3. Una *linea retta* A M B (Fig. 1.) è quella di cui tutti li punti sono nella direzione medesima. Si può concepirla come prodotta dal moto di un punto A che va da A in B senza piegare da alcun lato. Una linea A P B composta di parecchie linee rette che non sono nella medesima direzione, chiamasi linea *angolare*. Se il punto A andando da A in B segue il cammino A D B, descriverà esso una liena *curva*, vale a dire una linea la quale per piccola che sia non ha alcuna delle sue parti che sia retta.

Una linea A B D (Fig. 2.) composta d'una linea retta, e d'una curva chiamasi *mistilinea*. Egli è chiaro (Fig. 1) che la linea retta A M B è più corta della linea curva A D B, o della linea angolare A P B; dal che si deduce il principio seguente: *la linea retta è la più corta che si possa condurre da un punto all'*

altro; perciò A M B è la più corta linea che tirar si possa tra li punti A e B. Egli è chiaro altresì che tra li punti A e B non potrà essere condotta altra linea retta diversa da A M B; perchè tutte le altre rette che si volessero tirare dal punto A al punto B, cadrebbero sulla linea A M B, con essa confonderebbonsi, e non formerebbero che una sola e medesima linea. Da ciò possiamo conchiudere 1.° *Che bastano due punti per determinare la posizione d'una linea retta*; 2.° *Che due rette* (supposte anche indefinitamente allungate) *non possono avere due punti comuni*: perchè allora sarebbero distese l'una sull'altra, si confonderebbero e non formerebbero che una sola linea.

Un *piano* è una superficie che non ha nè profondità nè altezza: tale si è sensibilmente la superficie di una tavola ben livellata, o d'uno specchio pulito. Il *circolo* è una superficie piana terminata da una linea curva A H B D (Fig. 3.) che appellasi *circonferenza* o periferia del circolo, nella quale tutti li punti sono ugualmente distanti dal punto C che dicesi *centro*. Le linee C A, C H, C B ec. tirate dal centro alla circonferenza, si chiamano *raggi*. E' evidente esser essi tutti uguali, perchè tutti li punti A, H, B, ec. della circonferenza essendo ugualmente distanti dal centro, le linee A C, H C, che misurano queste distanze sono necessariamente uguali. La linea H C D che passa pel centro, e che termina in ambe le parti alla circonferenza si

nomina *diametro*. Egli è visibile essere ogni diametro composto di due raggi; perciò tutti li diametri di uno stesso circolo sono uguali, stante che lo sono tutti li suoi raggi. Ogni diametro ACB divide il circolo in parti uguali; perchè se concepiscasi il circolo ripiegato in guisa che il diametro AB serva di piegatura, è evidente che tutti li punti della parte AHB della circonferenza s'incontreranno esattamente sopra li punti della parte ADB. In fatti se il punto H p. e. cadesse di dentro o di fuori della curva ADB, esso sarebbe più vicino o più lontano dal centro C che dal punto D, vale a dire, che tutti li punti della circonferenza di un circolo non sarebbero ugualmente distanti dal centro, lo che è impossibile. Chiamasi *arco* una parte qualunque della circonferenza; così la parte AD è un arco. Alcune volte eziandio si dinota la circonferenza per via della parola circolo, lo che è usitatissimo presso li Geografi. Una linea retta che passa per le due estremità di un arco HB chiamasi *corda*, la quale è tanto più piccola quanto è più lontana dal centro verso la sua metà: così la corda HB è più piccola della corda HP.

4. La circonferenza di un circolo qualunque si divide in 360 parti uguali, che *gradi* si appellano; di modo che il grado del circolo è solo la 360.ª parte della sua circonferenza; e per conseguenza non vi sarà maggior numero di gradi in un circolo grande che in un piccolo; ma se la circonferenza di un circolo

colo è doppia di quella di un altro circolo, li gradi del primo saranno doppj di quelli del secondo; se la circonferenza del primo è tripla di quella del secondo, li gradi del primo circolo saranno parimente tripli di quelli del secondo ec. Ogni grado si divide in 60 parti uguali, che si chiamano *minuti*; ogni minuto in 60 *secondi*, ogni secondo in 60 *terzi*, e così di seguito in infinito. Il segno con cui indichiamo il grado è ^{o}, quello del minuto ^{I}, quello de' secondi ^{II}, quello dei terzi ^{III}. Così 25^{o}, 5^{I}, 12^{II}, 30^{III}, significano, venticinque gradi, cinque minuti, dodici secondi, trenta terzi. Li circoli si dicono *concentrici* allorchè hanno un medesimo centro; così li circoli AHBD, *afd* sono concentrici. Ma li circoli *adp*, *pdm* (Fig. 5.) sono *eccentrici*, perchè hanno centri differenti. *Tangenti* diconsi le linee che toccano un circolo, senza tagliarlo; così B*t* è una tangente. Chiamasi *secante* una linea che taglia un circolo; così la linea *ac* è secante rapporto al circolo *pBmd*. Il *settore* del circolo non è altro che lo spazio compreso tra due raggi AC, FC e l'arco FA (Fig. 3.); *segmento* poi è lo spazio compreso tra un arco qualunque HB e la sua corda.

5. Linee *perpendicolari* son quelle che incontrano un' altra linea senza pendere nè da un lato nè dall' altro. Così *hx* (Fig. 4.) è perpendicolare ad *ab*. E' agevole l' intendere che se *hx* non pende nè dal lato di *a* nè dal lato di *b*, la linea *ab* non piegherà nemmen essa

nè

nè dal lato di *b*, nè dal lato di *x*; vale a dire, che se una linea è perpendicolare sopra un'altra linea, la seconda sarà altresì perpendicolare sopra la prima. Li Geometri chiamano *oblique* quelle linee che incontrano un' altra piegando più da una parte che da un'altra: così le linee *bf*, ed *ba* sono oblique sopra la linea *ab*; perchè la prima pende più dalla parte di *a* che di *b*, e la seconda pende più dalla parte di *b* che dalla parte di *a*. Linee *parallele* sono quelle che in ogni lor punto sono ugualmente distanti l'una dall' altra, e che non possono giammai incontrarsi; tali sono le linee *mn*, *ph*, di cui tutti li punti corrispondenti *h* ed *m*, *p* ed *n* sono sempre ugualmente distanti.

6. *L'angolo rettilineo* è l'apertura che lasciano tra loro due linee rette A C, F C che vanno ad incontrarsi in un punto C (Fig. 3.). E' visibile che a proporzione che il punto F s'allontanerà dal punto A, dovrà crescere l'angolo siccome l'arco A F. Parimente egli è chiaro esser l'angolo *a* C *f* uguale all' angolo A C F; e perciò la grandezza dell'angolo dipende dall'apertura e non dalla lunghezza dei lati o linee ond'è composto. Ma per poco che si metta di attenzione è facile comprendere che se l'arco A F è la decima parte della sua circonferenza, l'arco *af* sarà anch'esso la decima parte della sua, e che in generale questi due archi saranno sempre parti simili delle loro circonferenze, vale a dire, conterranno lo stesso numero di gradi, minuti, se-

con-

condi , terzi ec. per la qual cosa dicono li Geometri che l' angolo ha per misura l' arco compreso tra li suoi lati , e descritto dal suo vertice come centro ; ma allora prendono per questa misura non già l'arco medesimo, ma il numero dei gradi , minuti , secondi , terzi ec. ch' esso contiene . Laonde supposto esser l'arco A F la decima parte di sua circonferenza ; quest'arco sarà di trenta sei gradi , essendo che 36 è la decima parte di 360 ; allora poi anche l' arco *af* sarà di 36.° Per la qual cosa sarà lo stesso, o prendasi l' arco *af*, o l' arco A F per la misura di quest'angolo . E' manifesto che due angoli sono uguali allorchè hanno per misura archi uguali descritti dalla medesima apertura di compasso .

7. *Angolo curvilineo* è quello ch' è formato dal concorso di due linee curve ; tale si è l' angolo *ndm* (Fig. 5.) ; l' angolo poi *m* B *t* formato da una linea curva ed una retta chiamasi *angolo mistilineo* .

8. Dinotiamo ordinariamente un angolo per via di tre lettere, delle quali quella di mezzo indica il *vertice* ; lo dinotiamo eziandio per via d' una sola lettera situata alla sommità o vertice dell'angolo . L' angolo dicesi *retto* allorchè ha per misura un quarto di circolo ; tale è l' angolo H C B (Fig. 3.) ; l' angolo è *acuto* se ha per misura meno di un quarto di circolo ; *ottuso* finalmente allorchè ha per misura più di un quarto di circolo . Quindi l' angolo A C F è acuto , e l' angolo F C B è ottuso . Il *complemento* d' un angolo o d' un

arco

arco, nel significato con cui prendiamo qui un tal termine, è ciò che manca a tal angolo, od arco per valere 90.° ; il *supplemento* di un angolo, od arco è ciò che manca a tal angolo, od arco per valere 180.°. Da ciò si deduce che gli angoli (lo stesso pure si dica degli archi) i quali hanno complementi uguali o supplementi uguali sono uguali ; e reciprocamente se due angoli hanno complementi o supplementi uguali, essi saranno uguali.

9 Definizioni. Uno spazio terminato da linee è una *figura* ; una figura di tre lati si chiama *triangolo*.

PAR-

PARTE PRIMA.

Delle Linee.

10. TEOREMA: *Una linea ay* (Fig. 6.) *cadendo sopra un' altra linea b d, forma sopra questa linea due angoli a c d; a c b dalla stessa parte* (i quali si chiamano *contigui* o angoli *conseguenti*) *che presi insieme vagliono due angoli retti.*

In fatti se dal punto *c* come centro, si descriva il circolo *a b d*, è evidente che *b d* sarà un diametro e *b a d* una semicirconferenza; ma l'angolo *b c a* ha per misura l'arco *b a*, e l'angolo *a c d* ha per misura l'arco *a d*; dunque questi due angoli presi insieme hanno per misura la semicirconferenza *b a d*; e per conseguenza vagliono due angoli retti.

COROLLARIO I. Due angoli *contigui* o *conseguenti* sono supplementi l'uno dell'altro; e perciò se l'uno delli due angoli *b c p* è retto, sarà retto ancora il suo supplemento *p c d*. Ma in tal caso la linea *p c* non piegando più alla parte *d* che alla parte *b*, è necessariamente perpendicolare sopra la linea *b d*; quindi le perpendicolari sono linee che s' incontrano ad angoli retti.

COROLLARIO II. Se dal punto *c*, saranno tirate quante linee più si vorrà, tutti gli angoli *b c a*, *a c p*, *p c x*, *x c d* formati sopra la linea *b d* avranno per misura la semicirconfe-

ren-

renza *bad*; e parimente tutti gli angoli formati sotto la stessa linea *bd* avranno per misura la semicirconferenza *bgyd*; talchè tutti gli angoli che formare si possono intorno di un punto vagliono quattro angoli retti, o 360.°

11. TEOREMA. *Gli angoli opposti al vertice sono uguali*. *Angoli opposti al vertice* si dicono quelli che formati sono da due linee che s'incontrano, e che hanno le loro punte opposte; tali sono gli angoli *bcd*, *pcf* (Fig. 7.).

Secondo ciò che di sopra abbiam detto, li due angoli conseguenti *bcd*, *dcp* sono supplementi l'uno dell'altro. Parimenti, gli angoli conseguenti *dcp*, *pcf* sono anch'essi supplementi l'uno dell'altro; dunque li due angoli *bcd*, *pcf* hanno il medesimo supplemento *dcp*, e sono per conseguente uguali (8).

12 TEOREMA. *Una linea fx* (Fig. 8.) *che taglia due parallele l i, n d forma con esse degli angoli a, b*, situati allo stesso modo, (chiamati *corrispondenti*) *uguali*.

Imperciocchè egli è chiaro che le linee *nd*, *li* non sono punto più inclinate l'una o l'altra sopra la linea *fx* dal lato del punto *f*; altrimenti queste linee si avvicinerebbero l'una all'altra, e non sarian parallele; ma la grandezza degli angoli dipende dalla inclinazione delle linee; dunque gli angoli corrispondenti de'quali parliamo sono uguali. Oltre di che per qual ragione sarebbe maggiore l'uno dell'altro?

COROLLARIO I. Dunque se l'angolo *a* è retto, retto

retto sarà anch'esso l'angolo *b*; vale a dire, se una linea *fx* sarà supposta perpendicolare sopra una delle parallele *li*, *nd*, essa lo sarà ancora sull'altra.

Gli angoli *c*, *b* situati tra le parallele, uno appartenente ad una delle parallele e l'altro all'altra parallela, l'uno a destra, l'altro a sinistra della secante *fx* si chiamano *angoli alterni interni*; chiamansi poi *angoli alterni esterni* gli angoli quali *a* ed *x* situati fuori delle due parallele, uno a destra, l'altro a sinistra della linea *fx*. Li due angoli corrispondenti *b*, *a* sono uguali come ora abbiam detto. L'angolo *a* è uguale all'angolo *c*, perchè sono opposti al vertice; dunque gli angoli alterni interni *c*, *b* sono uguali. Gli angoli *a*, *b* sono uguali, perche sono corrispondenti; l'angolo *b* è uguale all'angolo *x*, perchè essi sono opposti al vertice. Dunque gli angoli alterni esterni *a*, *x* sono uguali.

COROLLARIO II. Due angoli *fai*, *ihd* che hanno le loro sommità *h*, *a* rivolte verso lo stesso punto *x* dello spazio, ed i cui lati sono paralleli, sono uguali. Perciocchè essendo *ih* parallela ad *fx*, gli angoli *ihd*, *fbd* sono corrispondenti ed uguali; ma l'angolo, *b*, e l'angolo *a* sono anch'essi corrispondenti ed uguali; dunque gli angoli *ihd*, *fai* sono uguali.

E' facil cosa di vedere, che se li due angoli corrispondenti *a* e *b* sono uguali, le due linee *li*, *nd* avranno la medesima inclinazione dallo stesso lato per rapporto alla linea

fax,

fa x, lo che giammai non farebbe se esse non fosser parallele. Lo stesso dicasi allorchè gli angoli alterni interni saranno tra loro uguali. Lo stesso parimenti dovrà dirsi se gli angoli alterni esterni sono uguali tra loro.

13. PROBLEMA. *Da un punto i condurre una parallela alla linea n d.*

Dal punto *i* come centro descrivete con qualunque apertura di compasso un arco *t h*, che incontri la linea *n b* in *h*; dal punto *h* colla stessa apertura di compasso descrivete l' arco *i d*, aprite il compasso da *d* in *i*, e portate quest' apertura da *h* in *t*. Dal punto *i* e dal punto *t* tirate la linea *i t*, e sarà sciolto il problema. Imperciocchè gli angoli alterni interni *b i t*, *i h d* sono uguali, perchè misurati sono da uguali archi descritti da una stessa apertura di compasso. Dunque, giusta il fin quì detto, le linee *n d*, *t i* sono parallele.

14. OSSERVAZIONE. Allorchè vorrete assicurarvi se due angoli sono uguali, basterà che descriviate dal loro vertice come centri, e con ugual apertura di compasso degli archi tra i loro lati; ora questi archi devono essere uguali se gli angoli sono ugual, di modo che se gli archi sono ineguali lo saranno eziandio gli angoli. Giova assai alli principianti l' afferrar bene questa osservazione.

15. PROBLEMA. *Condurre una perpendicolare sopra una linea a b* (Fig. 9.)

Dalli punti *a* e *b* come centri con un' apertura di compasso maggiore che la metà di questa linea, descrivete gli archi *x x*, *g g* che

vadano a tagliarsi in *h* dissopra della linea *a b*; fate lo stesso di sotto, e dalli punti *h* ed *h* conducete la linea *h p h*, e sarà sciolto il problema. Imperciocchè tutti li punti dell' arco *x x* sono ugualmente distanti dal punto *a* ch' è il centro dell' arco; parimenti tutti li punti dell' arco *g g* sono ugualmente distanti dal punto *b*; dunque li due punti *h*, *h* sono ugualmente distanti da *a* e da *b*: e poichè la posizione di una linea non dipende che da due punti, tutti li punti della linea *h h*, ciascuno in particolare, debbono essere ugualmente distanti da *a* e da *b*; dunque il punto *p* sarà anch' esso ugualmente distante da *a* e da *b*, e la linea *h h* non penderà nè dal lato di *a* nè da quello di *b*. Quindi essa sarà perpendicolare sopra la linea *a b*, e di più la taglierà in parti uguali.

16 Corollario I. Si può adunque collo stesso metodo dividere una linea *a b* in due parti uguali.

17. Corollario II. Dalle cose dette segue che qualunque volta una linea retta avrà due punti ugualmente distanti dagli altri due punti di un' altra linea retta, le sarà perpendicolare.

Corollario III. Dunque volendo condurre una perpendicolare sopra la linea *a b* (Fig. 10.) per un punto *d* di tal linea, basta (dopo aver descritto dal punto *d* come centro una semicirconferenza *a c b*) descrivere due archi che si talgino in *h*, descrivendoli colla medesima apertura di compasso; e pigliando per centri

li

li punti *a* e *b* ove la femicirconferenza concorre colla linea data *ab*. Tirando poscia la linea *hd* li cui punti *h* e *d* sono equidistanti dalli punti *a* e *b*, si avrà la perpendicolare richiesta.

COROLLARIO IV. Se dal punto *h* fuori della linea *ab* (Fig. 11.) si vuol condurre una perpendicolare a questa linea; dal punto *h* preso per centro si descriverà un arco di circolo *cc* che tagli la linea *ab* in due punti; dalli punti d'interfezione *c*, *c* come centri descrivendo colla stessa apertura di compasso due archi che si taglieranno in *p*, si dovrà condurre la line *hp*, che sarà la perpendicolare richiesta. Di fatti li punti *c* e *c* sono ugualmente distanti dal punto *p* e dal punto *h* (centro dell'arco *cc*); dunque la linea *hp* ha due punti equidistanti dagli altri due punti della linea *ab*; dunque (Coroll. II.) la linea *hp* è perpendicolare sopra l'*ab*.

18. TEOREMA. *Da un punto p in una linea o da un punto h fuori d'una linea ab; non può essere condotta che una perpendicolare h p alla stessa linea* (Fig. 4).

Imperciocchè ogn'altra linea *cp*, o *hd* pende necessariamente da un lato o dall'altro della linea *ab*; dunque ec.

COROLLARIO. Dunque due linee *hp*, *mn* perpendicolari sopra una stessa linea *ab* sono parallele e non è possibile per conseguente che concorrano (5); perchè se concorressero potrebbesi dal punto di concorso condurre due perpendicolari sulla linea medesima *ab*, lo

che per il teorema è impossibile.

19. TEOREMA. *La perpendicolare è più corta che l'obbliqua tirata da uno stesso punto h sulla linea ab.*

Prolongato avendo *hp* fino in *x* di modo che *ph* sia $= px$; è manifesto che se piegate la figura in guisa che *af* serva di piegatura, ed *hp* cada sopra *px*, *hd* caderà sopra *dx*, ed *ha* sopra *ax*; dunque $hd = dx$, ed $ha = ax$. Ma la linea angolare $hdx > hx$; dunque *hd*, metà della prima linea, è maggiore di *hp*, metà della seconda; dunque la perpendicolare *hp* è più corta che *dh*, ec.

20. COROLLARIO I. La linea angolare *hax* scostandosi più dalla retta *hpx* che l' altra angolare *hdx*, dev' essere la prima maggiore che *hdx*. Dunque *ha* metà della prima linea angolare, è più lunga di *hd*, metà dell' altra; dunque tra tutte le obblique quelle che sono più discoste dalla perpendicolare sono più lunghe. Ma se due obbiique *bf*, *hd* stanno ugualmente discoste dalla perpendicolare, l' una a destra l' altra a sinistra, è visibile che saranno uguali; e posciachè non vi possono essere più che due rette ugualmente lontane dalla perpendicolare l' una a destra l' altra a sinistra, non è possibile di condurre da un medesimo punto *h* più di due linee uguali sopra una stessa linea *ab*.

21. COROLLARIO II. Una linea *ca* (Fig. 12.) condotta dal centro *c* alla tangente *ga* al punto del contatto *a*, è perpendicolare a questa tan-

tangente. Diffatti la linea *ca* è la più breve che possa essere tirata dal centro alla tangente; perciochè ogn' altra linea *cp* che passasse pel centro *c* e terminasse alla tangente, sortirebbe fuori del circolo, e saria maggiore di *ca*: In oltre la tangente non tocca il circolo che in un punto solo: Imperciocchè ogn' altro punto *cp* diverso dal punto *a* è lontano dal corrispondente *i* della circonferenza quanto è l'intervallo *ip*: Ancora è manifesto che una linea *ga* perpendicolare all'estremità d'un raggio *ca*, tocca il circolo senza entrarvi dentro, ed è una tangente.

22. TEOREMA. *Una linea cp condotta dal centro perpendicolarmente alla tangente g h taglia le corde parallele alla tangente in parti uguali* (Fig. 13.)

In fatti poichè *cp* è perpendicolare sopra *gh*, essa sarà ancora perpendicolare sopra le parallele a questa linea, come si deduce da ciò che detto abbiamo di sopra (12); ed avendo la linea *cp* un punto *c* equidistante da *a* e da *d*, stante che il centro di un circolo è ugualmente lontano da tutti li punti della circonferenza, il punto di intersezione *s* sarà esso pure equidistante da *a* e da *d*; altrimenti la linea *cp* penderebbe da una parte o dall' altra della linea *ad*, e non le farebbe perpendicolare, lo che è contrario all' ipotesi; perciò la linea *cp* taglia la linea *ad* in due parti uguali in *s*.

Per poco che si presti di attenzione è facil vedere che la linea medesima *cp* taglia l'an-

golo *acd* in parti uguali; perchè come mai potrebbe la parte *acs* di quest' angolo essere maggiore o minore che la parte *dcs*? Vale a dire, che se dal vertice di un angolo *acd* compreso tra due lati uguali *ac*, *cd* sia condotta una perpendicolare *cs* sul lato opposto a quest' angolo, essa linea dividerà l' angolo ed il lato opposto ciascuno in parti uguali.

23. OSSERVAZIONE. Poichè la linea *cs* che passa pel centro, e che taglia la corda *ad* perpendicolarmente in *s* ed in parti uguali, non pende punto più dal lato di *a* che da quello di *d*, essa dee avere ciascun de' suoi punti ugualmente distante da *a*, e da *d*; dunque il punto *p* di tal linea sarà ugualmente distante da *a* e da *d*, vale a dire, che gli archi *pa* e *pd* compresi tra il punto *p*, ove la tangente *gh* incontra il circolo, e le estremità d' una corda *ad* parallela alla tangente sono uguali. Per la stessa ragione, se la corda *mn* è parallela alla linea *gh*, gli archi *mp*, *pn* saranno uguali. Dunque se dagli archi uguali *ap*, *pd*, si levano via gli archi uguali *mp*, *pn*, li restanti archi *am*, e *dn* saranno uguali. Quindi si può concludere, che *gli archi am, dn compresi tra due linee parallele sono uguali*.

24. PROBLEMA. *Far passare una circonferenza di circolo per tre punti dati a, b, d* (Fig. 14.) *i quali non siano in linea retta.*

Avendo unito li punti per via delle linee *ab* e *db*, tagliate queste linee nel modo detto di sopra (16) in due parti uguali per via delle

per-

perpendicolari *bb*, *xx*. Il punto d' interfezione *c* di queste perpendicolari sarà il centro del circolo richiesto; e se dal punto *c* e coll' intervallo *cb*, *ca* o *cd* sarà descritta una circonferenza, questa passerà per li tre punti dati. In fatti, tutti li punti della linea *bb* sono ugualmente distanti da *a* e da *b*; ma tutti quelli della linea *xx* sono anch' essi ugualmente distanti da *b* e da *d*; dunque il punto *c* d' interfezione delle due linee *bb*, *xx* sarà ugualmente distante dalli punti *a*, *b* e *d*, e sarà per conseguenza centro del circolo che dee passare per li tre punti dati.

OSSERVAZIONE. Questi tre punti non debbono essere in linea retta, perchè, com' è facile intendelo, una retta non può incontrare un circolo in più di due punti.

Dalle cose dette nella soluzione di questo problema segue, che se si avesse un arco *abd* del quale non fosse noto il centro *c*, dopo aver tirato due corde *ab*, *bd* per tre punti a piacere in tal arco, si troverebbe il centro *c* in quel modo che si è trovato nella soluzione del problema.

25. PROBLEMA. *Tagliare un arco ab in parti uguali.*

Tirate la corda *ab*, e cercate nel modo anzidetto (16) una perpendicolare *bb* che passi per lo mezzo *s* di tal corda. E' manifesto che questa linea avrà tutti li suoi punti ugualmente lontani dalle estremità *a* e *b* dell' arco *ab*; perchè essa non pende punto più dal lato di *a* che da quello di *b*. Ma il cen-

centro c di quest'arco è un punto ugualmente distante da a e da b; dunque primo questa linea passa pel centro c. In oltre, il mezzo m dell'arco ab è anch'esso un punto equidistante da a e da b; dunque in secondo luogo la linea hh passa essa pure per questo punto, e divide l'arco dato in parti uguali.

26. OSSERVAZIONE. E' evidente che gli angoli acm, mcb sono uguali; essendo che sono essi misurati dagli archi uguali am, e bm. Laonde quando si vorrà tagliare un angolo bca in parti uguali, basterà descrivere dal vertice c di cotal angolo preso per centro, un arco ab, e condurre, nella maniera ora spiegata, la linea hh, la quale tagli l'arco in parti uguali, e passi pel suo centro.

Della misura degli Angoli.

27. Dalle cose dette di sopra (6), la grandezza di un angolo il quale abbia il suo vertice al centro di un circolo, dev'essere valutata pel numero de' gradi, minuti, secondi, terzi, ec. dell'arco compreso tra li suoi lati. *Quindi un angolo che ha il suo vertice al centro di un circolo, ha per misura l' arco intero compreso tra li suoi lati.* Dal che ne viene che dato essendo un angolo B A C (Fig. 15.), si può farne un altro ad esso uguale. In fatti, tirate la linea ab e dal punto A come centro, con un'apertura di compasso a piacere, descrivete l' arco B C; dal punto a come centro, conservando la mede-

sima

sima apertura di compasso, descrivete l' arco *bc*; aprite il compasso da B in C, portate quest'apertura da *b* in *c*, e tirate poscia pel punto *c* e il punto *a* la linea *ca*; dico che gli angoli A ed *a* sono uguali; in fatti sono essi misurati dagli uguali archi BC, *bc* descritti dalla medesima apertura di compasso: Sono dunque uguali.

28 Un angolo N*a*M (Fig. 16.) che ha il suo vertice alla circonferenza del circolo, e ch'è formato da due corde, si chiama *angolo inscritto*. Se dal vertice *a* di quest'angolo voi descrivete l'arco di circolo *bd* C *f* con un' apertura di compasso uguale al raggio *a*C del circolo, se poscia mettendo una punta del compasso in *d*, aprite l'altra sino in *f*, potrete portar due volte una tal apertura di compasso sopra l'arco NPM compreso tra i lati dell'angolo N*a*M. Dal che potrete conchiudere *che l'arco df, misura dell'angolo daf, è la metà dell'arco* MN; vale a dire, *che un angolo inscritto* N*a*M *formato da due corde ha per misura la metà dell'arco* NM *compreso tra li suoi lati*. Dunque l' angolo NCM che ha il suo vertice al centro del circolo, e chiamasi angolo *centrale* è doppio dell'angolo inscritto appoggiato sullo stesso arco NM. In fatti il primo ha per misura l' arco intero NM, mentre non ha il secondo per misura che la metà di quest' arco medesimo.

Aprendo il compasso da *b* in *d* e portandolo così aperto sopra l'arco N*a* troverete l'

arco

arco N *a* doppio di *bd*, misura dell'angolo *bad*. Dal che concludete, che un *angolo* N *ab formato da una corda, e da una tangente, ha per misura la metà dell'arco* N *a compreso tra i suoi lati*.

Dal fin qui detto possiam concludere 1.° che tutti gli angoli inscritti *abp*, *acp* (Fig. 17) che sono appoggiati sopra lo stesso arco *adp* sono uguali; imperciocchè hanno tutti per misura la metà dell'arco *adp* compreso tra i loro lati. 2.° Che un angolo inscritto *bad* (Fig. 18.) appoggiato sul diametro *bd* è retto; perchè ha per misura la metà della semicirconferenza *bfd* ossia un quarto di circolo; ma l'angolo *bap* il quale ha per misura la metà dell'arco *bfdp* (su cui è appoggiato) maggiore che un semicircolo, ha per misura più che un quarto di circolo; perciò questo angolo è ottuso. Per contrario l'angolo *fad* appoggiato sopra un arco *fd* minore di un semicircolo, è per necessità acuto, avendo per misura meno che un quarto di circolo.

29. PROBLEMA. *Sopra la estremità p* (Fig. 19.) *della linea ap, la quale si suppone non poter essere prolungata, condurre una perpendicolare a questa linea*.

Avendo preso un punto *c* fuori della linea *ap* descrivete col raggio *cp* un circolo *apb* che tagli la linea data in *a*. Per il punto *a* e l'altro *c* tirate il diametro *acb*, e per li punti *b* e *p* la linea *bp*, e sarà sciolto il problema. In fatti l'angolo *bpa* è un angolo inscritto appoggiato sul diametro *ab*; dunque,

secon-

fecondo il già detto, esso è angolo retto. Ma le sole linee perpendicolari formano tra di loro angoli retti; dunque la linea *bp* è perpendicolare sopra *ap*.

30. PROBLEMA. *Da un punto dato f fuori di un circolo dmp, condurre una tangente ad esso circolo.*

Congiungete li punti *f* ed il centro *a* del circolo dato per via della linea *fa*, e cercate nel modo sopra accennato (16) il mezzo *c* della linea *fa*. Dal punto *c* preso per centro col raggio *ca* o *cf* descrivete il circolo *fdap* che tagli il circolo dato in *d* ed in *p*. Per il punto *f*, e li punti *d* e *p* tirate le linee *df*, *pf*, ed avrete due tangenti invece di una. Tirate li raggi *ad*, *ap*; egli è chiaro che gli angoli *fda*, *fpa*, che sono inscritti riguardo al circolo *fdap*, sono retti, perchè appoggiati sul diametro *fa*; dunque le linee *fd*, *fp* perpendicolari sono alle estremità de' raggi *pa*, *da* del circolo dato; dunque secondo il già detto di sopra (21), queste linee sono tangenti del circolo.

De' Poligoni.

31. La *figura rettilinea* o *poligono rettilineo* è uno spazio terminato da linee rette; è manifesto essere necessarie tre linee rette almeno per chiudere uno spazio. Il *triangolo* è un poligono di tre lati, il *quadrilatero* ne ha quattro, il *pentagono* cinque, l' *esagono* sei, l' *eptagono* sette, l' *ottogono* otto, l' *eneagono*

gono nove, il *decagono* dieci; l' *undecagono* undici, il *dodecagono* dodici ec. Chiamasi *regolare* il poligono, allorchè ha tutti li suoi angoli uguali tra loro come anche tutti li suoi lati; in caso diverso esso è *irregolare*. Un triangolo *bac* (Fig. 21.) i cui tre lati sono uguali tra loro, dicesi *triangolo equilatero*; se due soli suoi lati sono uguali si nomina *isoscele* (Fig. 22.): Ma è *scaleno* se i suoi tre lati sono ineguali (Fig. 23.): Un triangolo che ha tutti gli angoli acuti si dice *acutangolo* (Fig. 21.); *ottusangolo* poi se ha un angolo ottuso (Fig. 22.); e *rettangolo* se ne ha uno di retto (Fig. 23.). Nel triangolo il lato opposto ad un angolo si nomina *base* di tal angolo; quindi il lato *ba* (Fig. 22.) è la base dell'angolo *bca*. Nel triangolo rettangolo il lato opposto all' angolo retto appellasi *ipotenusa*; quindi nella figura 23 che ha l' angolo *c* retto, *bc* è la ipotenusa.

32. TEOREMA. *Li tre angoli di qualunque triangolo bap vagliono due angoli retti:* (Fig. 24)

Li tre vertici *b*, *a*, *p* di questo triangolo non essendo tre punti situati in linea retta, si può nel modo sopra spiegato (24), far passare un circolo per li tre angoli *a*, *b*, *p*, che saranno così angoli inscritti formati ciascuno da due corde. Dunque, per il già detto di sopra (28) l'angolo *a* avrà per misura la metà dell' arco *bp* compreso tra li suoi lati. Per la stessa ragione l'angolo *b* avrà per misura la metà dell' arco *ap*, e l' angolo *p* la metà dell'arco *ba*.

Laon-

Laonde li tre angoli bap avranno per misura la metà delli tre archi ap, bp, ba che formano l'intero circolo; ma queste tre metà vagliono un semicircolo o 180 gradi, e due angoli retti vagliono anch'essi 180 gradi, dunque li tre angoli di un triangolo hanno il valore di due retti.

Segue da questo teorema 1.° Che un triangolo non può avere se non un solo angolo retto, o un solo angolo ottuso; altrimenti li tre angoli di un triangolo varrebbero più di due angoli retti. 2.° Che se il triangolo abc (Fig. 23.) si supponga rettangolo in c, li due angoli a e b situati sull'ipotenusa varranno un angolo retto, e saranno complementi l'uno dell'altro. 3.° Che se in un triangolo bap (Fig. 24.) si conoscano due angoli, si potrà agevolmente conoscere il terzo. Imperciocchè sottraendo li due angoli noti da 180 gradi, resterà il valore del terzo angolo. Quindi supposto che l'angolo a sia di 80 gradi p. e. e l'angolo p di 60 gradi; si sottrarranno questi due angoli da 180 gradi, e il resto 40 gradi sarà il valore del terzo angolo b.

33. OSSERVAZIONE. Basta una tenuissima attenzione per comprendere che se l'angolo bap è maggiore che l'angolo b, l'arco bp che serve al primo d'appoggio, dev'esser maggiore che l'arco ap su cui sta appoggiato il secondo. E per conseguente la corda bp sarà maggiore che la corda ap; vale a dire, che un lato bp opposto ad un angolo a maggiore che un altro b, dev'esser maggiore che il lato

ap

np opposto all'angolo *b*, e reciprocamente: Dal che segue, che se li tre angoli *a*, *b*, *p* sono uguali, lo saranno parimenti li tre lati opposti; vale a dire, che un triangolo equiangolo è equilatero, e reciprocamente. Più; se due angoli *p*, e *b* solamente sono supposti uguali, li lati opposti a cotesti angoli saranno uguali, e reciprocamente se un triangolo ha due lati uguali, gli angoli opposti a questi lati saranno uguali; dunque *in un triangolo isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali*.

34. Supponghiamo che sia l'angolo *cab* (Fig. 22.) di 40 gradi; egli è manifesto che li tre angoli *b*, *a*, *c* del triangolo *bac* valendo 180 gradi, gli angoli *b* e *c* presi insieme varranno 140 gradi. Ma li due angoli contigui *cab*, *cap* vagliono insieme 180 gradi, o due angoli retti; dunque l'*angolo esterno cap formato dal lato ca, e dal prolungamento ap del lato ba vale quanto li due angoli interni c, b*.

35. Fate sopra una carta un triangolo BAC (Fig. 25.) a piacere, tirate sopra altra carta una linea $bc = BC$ e dal punto B come centro descritto avendo l'arco DF, descrivete dal punto *b* colla medesima apertura di compasso l'arco *fd*, e portando la grandezza dell'arco FD sull'arco *fd*, pel punto *d* ove termina questa grandezza, ed il punto *b* tirate la linea *bda* ed avrete l'angolo $abc = ABC$; fate poscia l'angolo *ncm* uguale all'angolo NCM, e conducete la linea *cna*. E' eviden-

te

te che li due triangoli BAC, *bac* avranno i loro lati BC, *bc* uguali, e gli angoli sopra questi lati anch'essi uguali. Ora tagliate questi triangoli con qualche instrumento da taglio, e sovrapponeteli l'uno all'altro, vedrete che l'uno non sorpasserà punto l'altro, e che sono uguali perfettamente. Da ciò concluderete, che due *triangoli aventi un lato uguale ambidue, e li due angoli adjacenti a questo lato altresì uguali, sono uguali in tutto.*

Questi stessi triangoli, che hanno gli angoli B e *b* uguali, e li lati, che comprendono gli angoli, anch'essi uguali, applicati che sieno l'uno sull'altro in guisa che la linea *bc* cada sopra la linea BC, e la linea *ba* sopra la linea BA si confonderanno perfettamente; *quindi due triangoli, che hanno un angolo uguale compreso tra due lati uguali, sono in tutto uguali.*

36. Essendo dato un triangolo ACB (Fig. 26.) situato sopra un cartoncino, o sopra un pezzo di carta, tirate la linea *ac* = AC; con un'apertura di compasso = AB, descrivete dal punto *a* come centro un picciolo arco in *b*, e dal punto *c* come centro con un raggio = CB descrivete un altro arco che tagli il primo in *b*. Ora avendo tirato le linee *a b e c b*, avrete un triangolo *abc*, i cui lati saranno uguali a quelli del triangolo ABC; e se applicate questi triangoli l'uno sull'altro vedrete che si combaciano perfettamente. Da ciò concludete, che *li triangoli che hanno i loro lati uguali sono in tutto uguali.*

37.

37. TEOREMA. *Se si concepisce che per tutti gli angoli a, b, d, f, g, h, di un poligono regolare abdfgh* (Fig. 27.) *siano state tirate le linee ac, bc, dc, le quali dividano gli angoli in due ugualmente, queste linee divideranno in altrettanti triangoli il poligono quanti esso ha lati.*

Imperciocchè l' angolo totale *bah* uguale essendo all' angolo totale *abd* (perchè tutti gli angoli d' un poligono regolare sono uguali tra loro (n.° 31.) l' angolo *bac* metà del primo sarà uguale all' angolo *abc* (metà del secondo), uguale all' angolo *cbd*, uguale all' angolo *bdc*; dunque li due triangoli *bca*, *bdc* hanno uguali i lati *ba*, *bd* compresi tra gli angoli uguali; dunque secondo il già detto di sopra (35) sono uguali. Per la stessa ragione li triangoli *bcd*, *dcf* sono uguali. Dunque ec. Dunque 1.° le linee *ac*, *bc*, *dc* ec. che si appellano *raggi obbliqui* del poligono, sono uguali. Dunque 2.° *Se dal centro c d' un poligono regolare saranno tirate delle linee a tutti gli angoli di tale poligono, esse lo divideranno in tanti triangoli uguali quanti vi sono lati.*

38. Diciamo essere un poligono inscritto in un circolo allorchè ha tutti li suoi angoli alla circonferenza del circolo. Se dal punto *c* come centro, con un raggio obbliquo *ca* o *cb* d' un poligono regolare descrivete un circolo, è evidente che passerà per tutti gli angoli di tal poligono. Se il poligono regolare è un esagono il lato *ba* sarà la corda della sesta

par-

parte della circonferenza o d' un arco di 60 gradi, e l'angolo *bca* misurato dall' arco *ba* di 60 gradi sarà anch' esso di 60 gradi. Ma gli angoli *abc*, *bac* sono altresì ciascuno di 60 gradi; imperciocchè sottraendo l'angolo *c* di 60 gradi, da 180 gradi, valore degli angoli del triangolo *abc*, restano 120 gradi per gli altri due angoli; ora questi angoli, come si è detto più avanti, sono uguali tra loro; dunque vagliono ciascuno 60 gradi. Dunque li tre angoli del triangolo *bac* sono uguali; dunque anche li tre lati sono uguali; vale a dire, che il lato *ba* dell' esagono regolare è uguale al raggio *bc* del circolo.

Quindi segue che portando 6 volte il raggio *bc* d' un circolo sulla circonferenza di questo stesso circolo, si avrà un esagono regolare inscritto; e per inscrivere un dodecagono regolare nel circolo, basta dividere gli archi *ab*, *bd*, ec. in parti uguali, e conducendo per li punti di divisione le linee *ma*, *mb*, *nb*, *nd*, ec. si avrà evidentemente un dodecagono regolare.

39. Se pel centro *c* si conduca la linea *cp* perpendicolarmente sul mezzo del lato di un poligono regolare, si avrà una specie di raggio che li Geometri chiamano *raggio retto*; basta osservare la figura per vedere che li raggi retti *cp* e *cq* sono uguali; perchè per qual ragione sarebbero eglino inuguali?

Se dunque col raggio retto *cp*, si descrive un circolo, questo circolo sarà rinchiuso in un poligono regolare li cui lati lo toccheranno

pel loro mezzo p, q, ec. un tal circolo è *circoscritto* in questo poligono.

40. DEFINIZIONI. Chiamansi *figure simili* quelle le quali avendo uno stesso numero di angoli e di lati, hanno tutti i loro angoli uguali ciascuno a ciascuno, e proporzionali li lati comprendenti questi angoli.

41. TEOREMA. *Le linee parallele* ab, cg (Fig. 28.) *comprese tra due linee parallele* ac, bg *sono uguali*. In fatti non v'è alcuna ragione per cui esser possano inuguali.

COROLLARIO. E' evidente che se le parallele xy, PP sono tanto distanti tra loro quanto le linee ac, bg, e così le parallele x P, y P siano tanto inclinate tra le prime linee quanto le parallele cg, ab lo sono tra le seconde, le linee ba, cg saranno uguali tra loro, ed alle linee Px, Py; ciò che si troverà ad evidenza eziandio misurandole.

42. Prendete una linea qualunque ad (Fig. 29.) la quale abbia colla linea an quel rapporto che più vi piaccia p. e. di 1 a 2; tirate le linee dn, cm, bf, ap parallele tra loro. Se la linea ad è la metà della linea an, cd sarà la metà di mn, bc la metà di fm, ab la metà di af, ac la metà di am, come è facil convincersene col compasso; dunque in generale una parte qualunque della linea ad compresa tra due parallele, o tra il vertice dell'angolo nad ed una delle parallele, è la parte corrispondente della linea an, come un'altra parte della prima è ad un'altra parte corrispondente della seconda, e come la pri-

prima è alla seconda. Dal che si ricava questa serie di ragioni uguali; $cd:mn::cb:fm::ab:af::ad:an$.

Se le parti ab; bc; cd della linea ad si suppongano uguali tra loro, le parti corrispondenti af; fm; mn della linea an saranno esse pure uguali tra loro.

Corollario. Per la stessa ragione, se si conduce la linea mh parallela alla base bc del triangolo bac (Fig. 30.), la parte am sarà al a parte an come la parte bm alla parte nc, e come la linea ab alla linea ac; vale a dire, che se si tagliano li due lati di un angolo bac con una linea mh parallela al lato opposto, le parti tagliate saranno proporzionali tra loro, e ai lati interi.

43. Teorema. *Due triangoli* abc, ABC (Fig. 31.) *che hanno i loro lati paralleli, sono equiangoli*.

In fatti, secondo il già detto di sopra (12) gli angoli a ed A che hanno i loro lati paralleli sono uguali; per la stessa ragione gli angoli b, B e c, C debbono essere uguali; dunque li due triangoli abc, ABC sono equiangoli, oppure, ciò ch'è lo stesso, hanno i loro angoli uguali ciascuno a ciascuno.

44. Se il lato ab è la metà del lato AB, troverete che il lato bc sarà la metà del corrispondente od omologo lato BC, mentre che il lato ac sarà anch'esso la metà del suo corrispondente AC. Se AB è triplo di ab, BC sarà triplo di bc; ec. Laonde li triangoli equiangoli hanno i lati loro omologi propor-

zionali, e per conseguenza sono simili. Conviene notare chiamarsi in due triangoli lati *omologi* quelli che sono opposti ad angoli uguali. Se dopo aver descritto il triangolo *abc*, fate un altro triangolo A B C, prendendo il lato A B doppio di *ab*, e descrivendo dai punti A, B presi per centri, degli archi che si taglino in C, e li cui raggi A C, B C siano altresì doppii, l'uno della linea *ac*, l'altro della linea *bc*, avrete un triangolo A B C li cui angoli saranno respettivamente uguali a quelli del triangolo *abc*, come potrete agevolmente assicurarvene col misurarli nel modo sopra additato (14). Da ciò concludete, che *due triangoli che hanno li lati omologi proporzionali, hanno altresì i loro angoli uguali ciascuno a ciascuno, e sono simili*.

45. Conducete la linea *mn* parallela alla base *bc* del triangolo *bac* (Fig. 30.); è evidente che gli angoli *amn*, *abc* saranno corrispondenti, e perciò uguali (12). In oltre l'angolo *a* è comune ai due triangoli *amn*, *abc*; dunque questi triangoli hanno i loro angoli uguali ciascuno a ciascuno, sono simili, e li lati *am*, *an* sono proporzionali alli lati *ab*, *ac*. Fate un angolo M A N $=$ *man* (27), ed avendo preso A M $=$ *am* ed A N $=$ *an*, tirate la linea M N; è evidente (35) che li triangoli *amn*, A M N sono uguali in tutto; di più è chiaro che li lati A M, A N saranno proporzionali ai lati *ab*, *ac*, come lo sono i lati *am*, *an*. Da ciò potete conclu-

cludere 1.° che *li triangoli* AMN, *amn* *sono tutti due simili al triangolo* *abc*. 2.° che *due triangoli* AMN, *abc* *che hanno un angolo uguale* A ed *a*, *e li lati comprendenti quest' angolo proporzionali*, *sono simili*.

46. Teorema. *Se dal vertice f dell' angolo retto di un triangolo rettangolo afb* (Fig. 32.) *si abbassa la perpendicolare fc sopra l' ipotenusa ab, il triangolo sarà diviso in altri due triangoli afc, bfc, simili al maggior triangolo, e perciò simili tra loro*

Di fatti 1.° il triangolo *afc* ha un angolo in *a* comune col maggior triangolo; di più essi triangoli hanno ciascuno un angolo retto, l'uno in *c*, l'altro in *f*; dunque il terzo angolo è uguale da una parte e dall' altra. Quindi questi triangoli hanno gli angoli loro uguali ciascuno a ciascuno, e sono simili. 2.° il triangolo *fbc*, ed il triangolo maggiore, hanno un angolo comune in *b*, ed hanno in oltre ciascuno un angolo retto, l' uno in *f*, l'altro in *c*; dunque sono simili. 3.° Poichè li triangoli minori sono simili al maggiore, scorgesi ad evidenza ch' essi debbono esser simili tra loro.

47. Corollario I. Poichè li due minori triangoli sono simili tra loro, i lati loro omologi sono proporzionali; laonde si avrà la proporzion seguente: il minor lato *ac* del triangolo *acf* è al minor lato *fc* del triangolo *fcb*, come il medio lato *fc* del primo triangolo è al medio lato *cb* del secondo; ossia $ac:cf::cf:cb$; vale a dire, che *la per-*

pendicolare fc *è media proporzionale geometrica tra le due parti* ac, *e* cb *della ipotenusa*.

48. Corollario II. Da un punto qualunque f della semicirconferenza d'un circolo, tirate avendo le corde fa, fb all'estremità del diametro ab, l'angolo inscritto afb sarà retto, perchè appoggiato sul diametro (28), il triangolo afb sarà rettangolo, e la linea cf media proporzionale tra le due parti ac, cb del diametro ab, che qui è una ipotenusa.

49. Problema. *Trovare una linea media proporzionale geometrica tra altre due linee date m ed n*.

Disponete queste linee mettendole una all'estremità dell'altra, cosicchè esse ne facciano una sola uguale alla linea ab; cercate il mezzo p di questa linea, e descrivete col raggio ap il semicircolo afb, per il punto c, ove si congiungono le linee n ed m, conducete (Coroll. III, n.° 17) cf perpendicolare alla linea ab, e terminata in f dall'incontro del semicircolo, e così sarà sciolto il problema. Imperciocchè segue dall'ultimo corollario che fc è media proporzionale tra $ac=m$, e $cb=n$. Se fate $cf=x$ avrete la proporzione $m:x::x:n$.

50. Prbolema. *Dividere una linea data* M (Fig. 33.) *in parti uguali*.

Supponghiamo che si voglia divisa questa linea in tre parti uguali; portate tre volte una certa apertura di compasso sopra una linea indefinita ad, di modo che le tre parti af, ;

af, *fb*, *bd* formino una linea maggiore che M. Dalli punti *a* e *d* come centri, descrivete col raggio *ad* degli archi che vadano a tagliarsi in *n*; da questo punto, e dalli punti *a* e *d* conducete le linee *na*, *nd*, ed avrete un triangolo equilatero *nad*. Portate un' apertura di compasso uguale alla linea M da *n* in *m*, e da *n* in *p*, tirate la linea *mp*; essa sarà uguale alla linea M. Ora se condurrete dal punto *n* e dai punti di divisione della linea *ad* le linee *nf* ed *nb*, queste linee divideranno $mp = M$ in tre parti uguali in *b* ed in *c*. In fatti è visibile che le linee *nf*, *nb* dividono le due basi parallele *mp* ed *ad* in un modo simile. Ma per la costruzione esse dividono la linea *ad* in tre parti uguali; dunque dividono ancora la linea *mp* o la data linea M in tre parti uguali.

Si può altresì risolverlo in quest' altra maniera. Portate sopra una linea indefinita *ad* (Fig. 29.) tre uguali aperture di compasso, fate un angolo qualunque *nad* e prendete $an = M$. Tirate *dn*, dai punti *b* e *c* conducete le linee *cm*, *bf* parallele a *dn* (13). Secondo quel che si è detto di sopra (42) le parti della linea *an* saranno uguali tra loro come quelle della linea *ad*.

In una figura si chiama *diagonale* una linea AD qualunque condotta da un angolo A ad un angolo opposto D (Fig. 34.).

51. TEOREMA. *Due poligoni simili possono dividersi in uno stesso numero di trian-*

goli simili per via di diagonali che partano da due angoli omologi. (Fig. 34.).

Dal vertice dell'angolo A, tirate le diagonali AC, AD, e dall'angolo omologo o corrispondente *a* dell'altro poligono, che supponiamo simile al maggior poligono, il quale chiamerò P, indicando il minore per *p*, tirate le diagonali omologhe *ac*, *ad*. E' manifesto che essendo simili questi poligoni, è l' uno in grande quello ch' è l'altro in piccolo; che li triangoli corrispondenti AFD, *afd* sono parti simili ciascuno del suo poligono (*a*), e che sono simili, perchè l' uno è in grande ciò ch'è l'altro in piccolo. Lo stesso è altresì evidente riguardo a triangoli ACD ed *acd*, ACB ed *acb*.

Se ciascun lato del poligono maggiore lo supporremo doppio del suo corrispondente nel minore, è chiaro che la somma dei lati del primo (somma che chiamasi *perimetro* del poligono) val a dire, il contorno o perimetro del maggiore, sarà anch' esso doppio del perimetro del minore; e perciò il perimetro del maggiore sarà al perimetro del minore, come A P : *af*. Ma poichè li triangoli AFD, *afd* sono simili (come poc' anzi abbiam detto), i lati loro omologi AF, *af* sono tra

(*a*) Vale a dire, se il triangolo AFD è il terzo p. e. del suo poligono, il triangolo *afd* sarà anch' esso il terzo del suo. Se AFD è il quarto del suo poligono, *afd* sarà il quarto del suo, ec.

tra loro come A D è ad *a d*. Dunque *li perimetri di due poligoni simili sono proporzionali ai loro lati omologi* A F; *a f*, *e alle loro diagonali omologhe* A D, *a d*.

52. Corollario I. *Due poligoni regolari simili, o di uno stesso numero di lati, hanno i loro perimetri proporzionali ai raggi loro retti ed obbliqui*. (Fig. 35.)

In fatti, secondo il testè detto, li perimetri di tali poligoni sono proporzionali ai lati di questi stessi poligoni. I lati *ng* ed *nr* sono evidentemente tra loro come li raggi *og* ed *sn*; imperocchè se *ag* è doppio di *nr*, *og* sarà altresì doppio di *sn*; poichè questi poligoni sono simili, essendo l' uno in grande ciò ch' è l' altro in piccolo, ed essendo lo stesso ancora dei triangoli *oga*, *snr* che sono parti simili di queste figure; e perchè li triangoli *ogp*, *sxn* sono evidentemente triangoli simili (essendo l'uno in grande ciò ch' è l' altro in piccolo) li raggi obbliqui *og*, *sn* sono tra loro come li raggi retti *op* ed *sx*; perciò li perimetri de' poligoni regolari simili sono proporzionali ai lati *ag* ed *nr*, ai raggi obbliqui *og* ed *sn*, e finalmente ai raggi retti *op* ed *sx*; dimodochè se *ag* è d' un piede ed *nr* di mezzo piede, il perimetro del primo poligono varrà 6 piedi e quello del secondo 3 piedi; il raggio *og* sarà doppio di *sn*, ed *op* sarà altresì doppio di *sx*.

53. Corollario II. Considerando li circoli come poligoni regolari di uno stesso numero

ro di lati infinitamente piccoli (*a*), si potrà dire, che *li perimetri*, val a dire, *le circonferenze dei circoli sono nel rapporto de' loro raggi*. Ma li raggi sono metà de' diametri, e le metà di due numeri 10 e 20 sono tra esse come questi numeri; perciocchè 5 metà di 10 è a 10 metà di 20, come 10 è a 20, ossia 5:10::10:20. Dunque le circonferenze sono tra loro nel rapporto dei loro raggi o dei loro diametri; talchè se il diametro di un circolo è doppio di quello di un altro circolo, la circonferenza del primo sarà doppia di quella del secondo.

PAR-

(*a*) E' manifesto che quanti più lati sono in un poligono regolare, tanto più esso è vicino a confondersi col circolo; sicchè se il numero de' lati del poligono si supponga infinitamente grande, verrà esso giudicato perfettamente uguale al circolo, e si confonderà con esso. Perciò da Geometri spesso è riguardato il circolo come un poligono infinitario, ossia d' un infinito numero di lati.

PARTE SECONDA.

DELLA GEOMETRIA.

Delle Superficie.

54. LA superficie *piana* non ha nè profondità nè altezza; la superficie *curva* è quella che non è piana. Un quadrilatero *abcd* (Fig. 36.) che ha due lati paralleli *ab*, *dc* chiamasi *trapezio*; se il quadrilatero non hà alcun lato parallelo all'altro, si nomina *trapezoide* (Fig. 37.). Se il quadrilatero *abcd* (Fig. 38) ha li suoi lati paralleli due a due, si dice *parallelogramo*. Se li lati contigui *ab*, *ad* sono ineguali, e gli angoli non siano retti, esso si appella *romboide*; ma se li lati *ad*, *ab* fossero uguali, (Fig. 39.) sarebbe un *rombo*. Se gli angoli del parallelogramo sono retti (Fig. 40.) dicesi *rettangolo*; sarà poi un *quadrato*, se li lati del rettangolo sono uguali (Fig. 41.). Una linea *ab* (Fig. 36.) sopra la quale si concepisce appoggiata la figura *adcb*, appellasi la *base* di questa figura; così pure *a*P è la base del triangolo *ad*P. Una perpendicolare *cp* condotta tra li lati paralleli di un trapezio, è detta *altezza del trapezio*; così

così ancora la perpendicolare *cp* condotta dal vertice dell' angolo *acb* sulla base *ab*, prolungata; se così fa d' uopo, è l' altezza del triangolo *acb*; parimenti *d*P $=$ *cp* (Fig. 38.) è l' altezza del parallelogramo *abcd*.

55. Date che siano le linee *a*, e *b* (Fig. 38.) coll' angolo *a*, sarà facile di costruire un parallelogramo *abcd*, li cui lati contigui *ad*, *ab* siano uguali rispettivamente alle linee *a*, e *b*, ed il cui angolo *dab* sia uguale all' angolo dato *a*: Tirate *ab* uguale alla linea *b*, poscia nel modo detto di sopra (27) fate l' angolo *dab* uguale all' angolo *a*; prendete il lato *ad* $=$ alla linea data *a*; dal punto *d*, tirate la *dc* parallela ed uguale alla *ab*; dai punti *c* e *b* tirate *cb*; e sarà risolto il problema. Se venga supposto retto l' angolo dato *a*, si avrà un rettangolo, e questo rettangolo sarà un quadrato se le linee *a* e *b* sono uguali.

56. Osservazione. Le linee *dc*, *ab* sono parallele tra parallele, e lo stesso è altresì delle linee *ad*, *cb*. Perciò, giusta ciò ch' è detto qui sopra (41), *ad* $=$ *cb*, e *dc* $=$ *ab*; vale a dire che gli opposti lati di un parallelogramo sono uguali. Conducete la diagonale *db*, ed avrete due triangoli *dba*, *dbc*, li cui lati saranno uguali ciascuno a ciascuno; perciocchè li lati *ab* e *dc* sono uguali come l' abbiamo ora dimostrato; lo stesso è ancora dei lati *da* e *bc*. Ma, di più, *db* è lato comune ai due triangoli; laonde questi triangoli hanno i loro lati uguali, e per conse-

ſeguenza ſecondo il già detto quì ſopra (36) ſono uguali in tutto, e ciaſcuno è la metà del parallelogramo. Ora ſe riflettete avere il triangolo *adb* la ſteſſa baſe *ab* del parallelogramo, ed anche la medeſima altezza *d* P, (ſendo che la perpendicolare *d* P tirata dal punto *d* tra le parallele *dc*, e *ab* è l'altezza comune tanto al triangolo che al parallelogramo) potrete concludere, che *un triangolo è la metà di un parallelogramo della ſteſſa baſe e della medeſima altezza*.

57. Avendo prolungato la linea *ab* conducete la *cp* perpendicolare ſopra la linea *ap*: una mediocre attenzione baſta a far comprendere, che li triangoli *ad* P, *bcp* ſono in tutto uguali; imperciocchè gli angoli corriſpondenti *da* P, *cbp* ſono uguali, ed in oltre hanno un angolo retto l'uno in P e l'altro in *p*; hanno adunque tutti i loro angoli uguali. Di più, queſti triangoli hanno li lati *ad*, *bc* uguali, e gli angoli adjacenti a queſti lati uguali, lo che (35) gli fa uguali in tutto; dunque 1.° *a*P $=$ *bp* ed *dc* $=$ P*p*: dunque 2.° togliendo via il triangolo *ad* P da una parte, e aggiungendo dall'altra il triangolo uguale *bcp* ſi avranno due figure uguali, cioè il parallelogramo *adcb* ed il rettangolo P*dcp*; e poiciachè queſte due figure hanno la medeſima altezza *d* P, ed altronde la baſe *ab* dell'una è uguale alla baſe P*p* dell'altra, ſi dee concludere, che un parallelogramo ed un rettangolo della ſteſſa baſe e della medeſima altezza ſono uguali in ſuperficie.

58.

58. Suppongasi un rettangolo *abcd* (Fig. 42.). Dividete la base *ab* in un dato numero di parti uguali, p.e. in 4, per via di linee parallele al lato *ab*, e supponendo che il lato *ad* contenga 3 parti della base *ab*, dividete questo lato *ad* in tre parti uguali; e dai punti di divisione conducete le linee parallele alla base *ab*; è manifesto che voi di questo modo otterrete 12 piccoli quadrati aventi ciascuno per lato una linea uguale alla linea *ap*, che è il $\frac{1}{4}$ della linea *ab*. Se *ab* è di 4 piedi; il picciol quadrato *apmn* sarà un piè quadrato; vale a dire, un quadrato il cui lato sarà d'un piede; quindi il rettangolo *abcd* varrà 12 piedi quadrati. Ma poichè 12 è il prodotto della base 4 per l'altezza 3, si può inferire, che *la superficie di un rettangolo è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

OSSERVAZIONE. E' impossibile moltiplicare una linea per un'altra linea, ma si prende il numero dei quadrati che formar si possono sopra *ab*, col prendere *na* per lato di questi quadrati tante volte quante *na* è contenuto in *ad*; lo che vuolsi intendere quando si dice che si moltiplica la base per l'altezza.

59. Veduto abbiamo qui sopra essere uguali in superficie un rettangolo ed un parallelogramo della stessa base e della medesima altezza; dunque per avere la superficie di un parallelogramo *abcd* (Fig. 38.) basta moltiplicare la base *ab* per l'altezza *dP*; e molti-

tipli-

tiplicando la base $Pp = ab$ per dP si avrà la superficie del rettangolo $Pdcp$, uguale a quella del parallelogramo $adcb$.

60. Abbiamo altresì osservato essere un triangolo adb la metà di un parallelogramo $adcb$ della stessa base e della medesima altezza (56); dunque giacchè per avere la superficie di questo parallelogramo, si moltiplica la base ab per l'altezza dP, per aver quella del triangolo adb, basterà *moltiplicare la base ab per la metà dell'altezza dP*; o sia moltiplicare la metà della base ab per l'altezza dP; si potrà ancora, volendolo, moltiplicar la base ab per l'altezza dP, e prendere la metà del prodotto; perocchè tutti questi risultati saranno uguali.

Le superficie si esprimono in tese quadrate, piedi quadrati, pollici quadrati, linee quadrate, ec. Una tesa quadrata è un quadrato, ciascun lato del quale è di una tesa; essa tesa quadrata vale 36 piedi quadrati; perchè la tesa in lunghezza vale 6 piedi, ed il quadrato di 6 è 36. Il piede valendo in lunghezza 12 pollici, ed il quadrato di 12 essendo 144, il piè varrà 144 pollici quadrati. Parimente il pollice quadrato vale 144 linee quadrate; e poichè la linea in lunghezza contiene 12 punti, la linea quadrata vale 144 punti quadrati.

61. Avendo tirata la diagonale ac (Fig. 36.) è facil comprendere che il trapezio $adcb$ sarà diviso in due triangoli acb, dac che avranno la medesima altezza dP, o cp, sendo che que-

questi due triangoli sono compresi tra le medesime parallele, e che *a* M, ch' è una perpendicolare abbassata dalla sommità *a* del triangolo *dac* sul prolungamento della base *cd*, è l'altezza del triangolo *cad* (54); ora *a* M è evidentemente una linea uguale alla linea *d* P. Ciò posto, per avere la superficie del triangolo *acb* si dee moltiplicare la metà di *ab* per *cp*, e per avere la superficie del triangolo *adc* bisognerà parimenti moltiplicare la metà della base *dc* di questo triangolo, per $cp = dP = aM$. Ma questi due triangoli insieme formano la superficie del trapezio; dunque *la superficie di un trapezio è uguale al prodotto della sua altezza cp per le sue due semibasi parallele*. Supponghiamo che sia *ab* di 6 piedi, e *dc* di 4, la metà della somma di queste basi parallele varrà 5 piedi; e se *cp* è supposto di 3 piedi, moltiplicando 5 per 3 si avranno 15 piedi quadrati per la superficie del trapezio.

62. Continuando nella stessa supposizione, se per li mezzi *n*, *m* dei lati *da*, e *cb* voi conducete la linea *mn*, la troverete di 5 piedi; perciocchè passando questa linea pel mezzo dei lati *ad* e *cb*, l'eccesso della linea *ab* sopra la linea *mn* dev' essere uguale alla differenza della linea *mn* alla linea *dc*, o ciò ch'è lo stesso, la linea *ab* dee sorpassare la linea *mn* come questa sorpassa la linea *dc*. E poichè ciò è appunto la proprietà fondamentale d'una proporzione continua aritmetica (Calc. 38.) potrete concludere in tutti li

li casi, che la linea mn è media proporzionale aritmetica tra le due basi del trapezio; o ciò ch'è lo stesso, che mn è la metà della somma di due basi ab e dc. Poichè mn passa per lo mezzo dei lati da e cb, è evidente aver essa tutti li suoi punti ugualmente lontani dai punti corrispondenti delle linee ab e dc, ed esser ad esse linee parallela.

63. Abbiamo detto di sopra (37), che un poligono regolare poteva essere diviso in uno stesso numero di triangoli uguali per via di linee tirate dal centro c agli angoli del poligono (Fig. 27.). Se moltiplicate il lato hg per la metà del raggio retto cp, avrete la superficie del triangolo hcg. Se moltiplicate questa superficie pel numero dei lati che suppongo essere 6, avrete la superficie totale del poligono regolare; il che sarà come se prendeste 6 volte il lato hg, e lo moltiplicaste per la metà di cp; ma 6 volte hg esprime allora il perimetro del poligono; laonde ad avere la superficie d'un poligono regolare, basta *moltiplicare il suo perimetro per la metà del raggio retto*. Se il perimetro è supposto di 24 piedi, ed il raggio retto di 4, si moltiplicherà 24 per 2, il prodotto 48 piedi quadrati darà la superficie del poligono. Troverassi il prodotto medesimo moltiplicando il raggio 4 per la metà 12 del perimetro; quindi si può dire, che *la superficie d'un poligono regolare è uguale al prodotto del suo raggio retto per la metà del perimetro*, oppure *del perimetro intero per la metà*

del raggio retto, oppure *della metà del prodotto del perimetro e del raggio retto*.

64. Ma il circolo può esser considerato come un poligono regolare di un' infinità di lati, in cui il raggio retto ed il raggio obbliquo non differiscano punto l' uno dall' altro; laonde si può dire, che *la superficie di un circolo è uguale al prodotto della sua circonferenza per la metà del raggio*, oppure *al prodotto del raggio intero per la semicirconferenza*.

Da ciò segue che la superficie del circolo *abm* (Fig. 43.) è uguale alla superficie d' un triangolo rettangolo *cmn* la base *mn* del quale fosse uguale alla circonferenza, e la cui altezza *cm* fosse il raggio del circolo; imperciocchè moltiplicando la base *mn*, oppure la circonferenza del circolo per la metà del raggio *cm*, si ha la superficie del circolo; e lo stesso prodotto esprime parimenti la superficie del triangolo *cmn*. Così pure il triangolo rettangolo CMN, la cui base MN è supposta uguale alla circonferenza del circolo ABM, e la cui altezza è uguale al raggio di cotal circolo, è uguale alla superficie di questo circolo medesimo. Ora vi risovvenga che essendo le circonferenze de' circoli nel rapporto de' raggi (53), il raggio *cm* è alla sua circonferenza *mn*, come il raggio CM alla sua circonferenza MN; di modo che li triangoli rettangoli *cmn*, CMN hanno li lati componenti l' angolo retto proporzionali, lo che (45) gli rende simili.

65.

65. Paragonate due parallelogrami ABCD, *abcd* (Fig. 44.), che supporrò simili; gli angoli corrispondenti A ed *a*, B e *b*, ec. saranno necessariamente uguali (40); e di più li lati omologi saranno proporzionali; vale a dire, che se p. e. il lato AB è triplo del lato *ab*; il lato AD sarà triplo del lato corrispondente *ad*. Ciò posto dividete AB in tre parti uguali e per li punti di divisione conducete le linee parallele a BC; dividete parimente AD in tre parti uguali, e per li punti di divisione conducete delle parallele alla base AB; vi sarà ora agevole di vedere che la superficie del maggior parallelogramo contiene nove parallelogrami uguali ciascuno al minor parallelogramo *abcd*; ora supponendo AD di tre piedi; *ad* sarà d'un piede; e perchè 9 è il quadrato di 3, ed 1 il quadrato di 1, *le superficie dei due parallelogrami simili* ABCD, *abcd sono tra loro come li quadrati dei lati omologi* AD, *ad* o AB ed *ab*, e ciò avverrà maisempre qualunque siano li parallelogrami simili. E' agevole eziandio comprendere (ed è facil vederlo misurandolo) che DP è triplo di *dp*, come AD lo è di *ad* (*a*); dunque *le medesime superficie sono tra esse come li quadrati delle altezze*;

I 2 66.

(*a*) Se questa prova (sufficiente per altro a molte persone) non andasse a genio di alcuni leggitori, saria facile il far loro riflettere che gli angoli A ed *a* essendo uguali, come ancora gli angoli retti P e *p*

66. Ma è evidente che avendo condotte le diagonali DB e *db*, li triangoli ADB, *adb* sono le metà dei parallelogrami ADCB, *adcb* (56), e siccome questi parallelogrami sono simili ed hanno le basi medesime e le medesime altezze che li triangoli corrispondenti, essi triangoli sono altresì simili. Dall'altra parte le metà sono come li tutti; dunque *li triangoli sono tra loro come li quadrati dei lati omologi* AD, *ad*, *come li quadrati delle basi*, *e come li quadrati delle altezze*.

67. COROLLARIO. Veduto abbiamo di sopra (64) che li triangoli simili *cmn*, CMN (Fig. 43.) erano uguali rispettivamente ai circoli *bam*, BAM, supponendo che *cm* e CM siano i raggi, e che *mn* e MN rappresentino le lunghezze delle circonferenze di questi circoli; dunque le superficie di tai circoli sono tra loro come li quadrati dei raggi *cm* e CM, o come li quadrati delle circonferenze *mn*, MN; ma li diametri sono come li raggi; dunque in generale, *le superficie dei circoli sono come li quadrati dei diametri*; *come li quadrati dei raggi*, *come li quadrati delle circonferenze*. Se il raggio di un circolo che chiamerò A si supponga di 5 pie-

---

c *p*, è necessario che il terzo angolo ADP del triangolo APD sia uguale al terzo angolo *adp* del minor triangolo *apd*, e che per conseguenza questi triangoli sono equiangoli, e simili. Ma ne' triangoli simili li lati omologi sono proporzionali; dunque AD : *ad* : : DP : *dp*; ora AD è triplo di *ad*; dunque DP è triplo di *dp*.

piedi, il raggio del circolo che indicherò per B di 2 piedi, la superficie del circolo A sarà à quella del circolo B, come il quadrato di 5 è a quello di 2, o come 25:4. Se il raggio del circolo A è di 2 piedi, e quello del circolo B di un piede, questi circoli saranno tra loro come li quadrati di 2 e di 1, o come 4:1.

68. Fate un angolo retto *bac* (Fig. 45.) conducendo la linea *ba* perpendicolare sopra *ac* (15), prendete *ab* di tre parti, p. e. di tre pollici; *ac* di quattro parti, e tirate *bc*; troverete (col compasso) esser *bc* di cinque parti; il quadrato di 5 è 25, quello di *ba* = 3 è 9, quello di *ac* è 16; ora $16+9=25$, vale a dire, che la somma dei quadrati dei lati comprendenti l'angolo retto di un triangolo rettangolo è uguale al quadrato fatto sull'ipotenusa, lo che sarà vero ugualmente in tutti li casi. Laonde li due quadrati *btda*, *amnc* presi insieme, vagliono quanto il quadrato *bchf* fatto sull'ipotenusa presa per lato; val a dire, che *in un triangolo rettangolo, il quadrato dell' ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati degli altri lati* (*a*).

 69.

(*a*) Questa prova può esser sufficiente al maggior numero delle persone; eccovene una per li leggitori più difficili a contentarsi. Secondo ciò che abbiamo detto di sopra (46) se dal vertice di un angolo retto *bac* di un triangolo rettangolo, si abbassi una perpendicolare sull'ipotenusa, questa linea dividerà il triangolo in due altri triangoli simili al maggior

69. Poichè il quadrato dell'ipotenuſa bc è uguale alla ſomma dei quadrati degli altri due lati ba ed ac, ſarà agevole di conoſcere l' ipo-

---

gior triangolo, e tra loro. D' altra parte, abbiam veduto (66) che le ſuperficie dei triangoli ſimili ſono nel rapporto dei quadrati de' lati omologi: perciò la ſuperficie del triangolo bac è alla ſomma delle ſuperficie dei triangoli bap, apc, come il quadrato dell' ipotenuſa bc è alla ſomma dei quadrati delle ipotenuſe ab, ed ac dei minori triangoli. Ma la ſuperficie del maggiore è uguale alle due ſuperficie de' due minori; dunque il quadrato dell' ipotenuſa del maggiore vale altresì la ſomma dei quadrati delle ipotenuſe de' due minori.

Se eſſendo dato il triangolo rettangolo iſoſcele bac (Fig. 46.) ſi deſcrive ſull' ipotenuſa bc, preſa per diametro, un ſemicircolo bac, e ſopra i lati ba e ac, preſi anch' eſſi per diametri, li ſemicircoli bma, anc; giacchè li circoli, e per conſeguenza ancora li ſemicircoli ſono tra' loro come li quadrati dei loro diametri (67), il ſemicircolo maggiore ſarà uguale ai due ſemicircoli minori, poichè il quadrato del diametro del maggior ſemicircolo è uguale alla ſomma de' quadrati dei diametri dei due minori ſemicircoli. Ma li diametri de' due ſemicircoli eſſendo per ſuppoſizione uguali, il maggior ſemicircolo ſarà doppio dell' uno dei due; e perciò il quarto di circolo $bxap$ è uguale al ſemicircolo $bmab$. Ma queſte due ultime figure hanno la parte comune $bxab$; dunque ſe ſi leva via queſta parte da ambedue, li reſidui ſaranno uguali. Ma reſterà nel quarto di circolo il triangolo bpa, e nel ſemicircolo lo ſpazio $bmaxb$ che ha la figura d' una falce, e che chiamaſi *Lunula* Ipocratica, ſtante che queſto Geometra fu il primo a trovarne la ſuperficie. D' altra parte vedremo nel decorſo poterſi fare un quadrato uguale a un triangolo; quindi ſi poſſono quadrare le Lunule d' Ipocrate.

Ora

ipotenusa, allorchè si conosceranno li due lati comprendenti l'angolo retto, e di conoscere uno dei lati dell'angolo retto, allorchè si co-

Ora egli è facile di comprendere che per fare un circolo, la superficie del quale sia doppia di quella di un altro circolo, basta formare un triangolo rettangolo isoscele *bac* (Fig. 47), e descrivere, prendendo *bc* per diametro un circolo *bmct* ed un altro circolo *bxan* il cui diametro sia *ba*. Imperciocchè il quadrato del diametro *bc* essendo doppio di quello di *ba*, la superficie del primo circolo sarà anch' essa doppia di quella del secondo. Scorgesi facilmente che essendo li raggi nel rapporto de' diametri, la superficie di un circolo che avesse *bc* per raggio sarebbe altresì doppia di quella del circolo che avesse *ba* per raggio.

Il quadrato della diagonale *bc* di un quadrato *baed* (Fig. 41.) è doppio del quadrato del lato *ac* o *ba*; perchè il triangolo rettangolo *bac* è isoscele; dunque il quadrato della diagonale è doppio del quadrato dell' uno dei lati uguali *ac* o *ba*; vale a dire, che abbiamo $(bc)^2 = 2.(ac)^2 = 2.(ab)^2$. Dunque chiamando a il lato, il quadrato della diagonale sarà $2a^2$, e quello del lato sarà a^2. Dunque il quadrato della diagonale sarà a quello del lato come $2a^2 : a^2 :: 2 : 1$; (perchè $2a^2$ contiene a^2 due volte, come 2 contiene 1 due volte,) e la diagonale sarà al lato come $\sqrt{2} : 1$; ma $\sqrt{2}$ è incommensurabile coll'unità o qualunque altro numero: vale a dire non ha punto un rapporto di numero razionale a numero razionale, perchè $\sqrt{2}$ non è numero razionale.

Le superficie dei poligoni simili sono tra loro come li quadrati dei loro lati omologi od anco delle loro linee omologhe o corrispondenti qualunque. In fatti, abbiamo veduto di sopra (51), che li poligoni simili BAFDC, *bafdc* (Fig. 34) potevano essere divisi in un numero di triangoli simili per via delle diagonali omologhe AC ed AD, *ac* ed *ad*, e questi trian-

goli

noscerà l'altro lato e l'ipotenusa. Imperciocchè se mi è noto essere ba di 3 piedi p. e. ed ac di 4, sommando insieme il quadrato di 3 e di 4, avrò la somma $9 + 16$ o 25, che sarà il quadrato dell'ipotenusa bc; e prendendo la radice quadrata della somma 25, avrò

---

goli sono evidentemente parti simili di loro figure, cioè che se il triangolo AFD è il terzo della sua figura, il triangolo corrispondente od omologo afd sarà il terzo della sua, e per conseguenza questi triangoli saranno tra loro come le figure P e p cui appartengono. Ma questi triangoli simili sono tra loro come li quadrati dei lati omologi AF ed af ossia AD ed ad. Dunque l'area del maggior poligono P è all'area del minor poligono p, come il quadrato del lato AF è a quello del lato af, o come il quadrato della diagonale AD a quello della diagonale ad. In generale, *le superficie de' poligoni simili sono tra loro come li quadrati de' loro lati omologi, o delle loro diagonali omologhe.*

Da ciò segue, che *le superficie di due poligoni regolari simili nmlibr, gfdrba* (Fig. 35.) *sono tra loro come li quadrati dei lati omologi rn, ag.* E perchè secondo ciò che detto abbiamo di sopra (52) questi lati sono tra loro come li raggi retti sx, op, o come li raggi obbliqui sn, og, o come li perimetri de' poligoni; *le superficie di due poligoni regolari simili ossia d'uno stesso numero di lati sono tra loro come li quadrati dei raggi retti ed obbliqui e come li quadrati dei perimetri.* D'altra parte possiamo qui considerare li circoli come poligoni regolari simili di uno stesso numero di lati infinitamente piccioli; laondè si può dire che le superficie de' circoli sono tra loro come li quadrati delle loro circonferenze, de' loro raggi o de' loro diametri; imperocchè li raggi sono metà dei diametri, e le metà sono nel rapporto de' tutti.

Abbiamo in altro luogo (67) dimostrato in altra maniera quest ultima proprietà.

avrò 5 per l'ipotenusa. Se dal quadrato 25 dell'ipotenusa si toglie via il quadrato 9 del lato *bn*, resterà il quadrato 16 del lato *nc*; perciò prendendo la radice 4 di questo residuo, si avrà il lato *ac*. Se succedesse che la somma dei quadrati delli due lati comprendenti l'angolo retto non fosse un quadrato perfetto; in tal caso non potrebbesi avere l'ipotenusa espressa numericamente se non se per approssimazione. Per far questo converrebbe far uso del metodo sopra indicato nel calcolo, trattando dell'estrazione delle radici quadrate (30).

70. PROBLEMA. *Data l'altezza d p di due piedi p. e. la quale nominerò h, d'un parallelogramo a b c d* (Fig. 48.) *e la base a b di 8 piedi che nominerò b, fare un quadrato m n f t che ad esso sia uguale in superficie.*

Cercate come si è detto di sopra (49) una linea che nominerò *x*, che sia media proporzionale tra la linea *h* e la linea *b*, questa linea sarà di 4 piedi; fate un quadrato *mnft* il cui lato sia uguale alla linea *x* e sarà sciolto il problema. In fatti la superficie del parallelogrambo è uguale al prodotto $b \times h = 8 \times 2 = 16$, della base per l'altezza, ed il quadrato *mnft* è uguale al prodotto del lato *mt* pel lato *mn*, vale a dire, è uguale ad $xx = 4 \times 4 = 16$. Dunque queste due figure sono uguali in superficie. Di più, essendo la linea *x* (che qui vale 4 piedi) media proporzionale tra *b* ed *h*, avremo la proporzione $h : x :: x : b$, nella quale il prodotto degli estremi *h b* dev' essere uguale al prodotto de' medii *x x*.

71.

71. Possiamo altresì facilmente fare un quadrato *mnft* (Fig. 49.) uguale ad un triangolo *dab*. Dal vertice *d* dell'angolo *adb* abbassate la perpendicolare *dp* sulla base *ab*, cercate poscia una linea *x* media proporzionale tra la base *ab*, e la metà *pc* dell'altezza *dp*, questa linea *x* sarà il lato del quadrato ricercato. In fatti nominando *b* la base del triangolo *adb*, la metà dell'altrezza *a*, avremo la proporzione $b:x::x:a$, in cui il prodotto degli estremi *ab* è uguale al prodotto de' medii *xx*, Ma *xx* addita un quadrato il cui lato è una linea $= x$, ed *ab* significa un triangolo la cui base è $= b$, e la semi-altezza $= a$; stante che trovasi la superficie di un triangolo (60) col moltiplicare la base per la metà dell'altezza. Se la base *b* è di 8 piedi, e l'altezza *dp* di 4 piedi, la semialtezza *a* sarà di 2 piedi ed *x* sarà di 4 piedi. Laonde il quadrato *xx* varrà 16 piedi quadrati (*a*).

72. COROLLARIO. Abbiamo veduto (64) che il triangolo rettangolo *cmn* (Fig. 43.) la cui base *mn* che supporremo uguale alla circonferenza del circolo *bam*, e di cui l'altez-

(*a*) Abbiamo detto (63) che un poligono regolare è uguale al prodotto del suo perimetro per la metà del suo raggio retto. Se questo perimetro che nominerò *b* sarà supposto di 8 piedi, e la metà del raggio retto, metà che indicherò per *a*, di 2 piedi, prendendo una media proporzionale *x* tra *a* e *b*, o qui tra 2 ed 8, il quadrato *xx* fatto sulla linea *x*, che sarà qui di 4 piedi, presa come lato, sarà uguale alla superficie del poligono regolare.

tezza *cm* è il raggio del circolo, è uguale in superficie a questo circolo. Dunque col fare un quadrato il cui lato sia medio proporzionale tra la base *mn* e la metà dell' altezza *cm*, o tra la circonferenza del circolo *bam* e la metà del raggio *cm*, si avrà una superficie uguale a quella del triangolo *cmn*, o a quella del circolo *bam*. Si potrebbe adunque quadrare il circolo, se dato essendo il diametro, oppure il raggio si potesse trovare esattamente la lunghezza della circonferenza; imperciocchè allora sarebbe facile trovare una media proporzionale geometrica tra la circonferenza e il semiraggio; ed il quadrato formato su questa linea presa per lato sarebbe uguale alla superficie del circolo, come segue da ciò che abbiamo detto di sopra (71).

73. Secondo il già detto (38), il lato dell' esagono regolare è uguale al raggio del circolo; dunque (Fig. 32.) li sei lati *nm*, *ml*, *li*, *ib*, *br*, *rn*, vagliono sei raggi, o tre diametri. Ma essendo l' arco *mn* maggiore che la sua corda, li sei archi corrispondenti alli sei lati dell' esagono regolare varranno più di sei raggi, o più di tre diametri. Dunque la circonferenza del circolo è maggiore che il triplo del suo diametro. Il rapporto approssimato del diametro alla circonferenza dato da Archimede è quello di 7 a 22. Quello di Mezio più esatto del precedente è di 113 a 355. Un altro Geometra lo stabilisce di 100 a 314. A conoscere a un di presso la circonferenza di un circolo il cui diametro è dato,

si può

si può fare questa regola di tre : 7 sono a 22 come il diametro dato è alla circonferenza cercata. Supponghiamo p. e. che venga domandata la circonferenza di un circolo il cui diametro fosse di 14 piedi; fate $7 : 22 :: 14 : x = \frac{22 \times 14}{7} = 44$ circonferenza cercata. Moltiplicando la metà del raggio per la circonferenza, oppure, ciò che torna allo stesso, il raggio 7 per la metà 22 della circonferenza, avrete la superficie del circolo, la quale sarà di 154 piedi quadrati incirca. Se data essendo la circonferenza si volesse avere il diametro, si farà la proporzione, 22 sono a 7 come la circonferenza data è al diametro cercato. Supponghiamo p. e. che si domandi il diametro di un circolo la cui circonferenza è di 44 piedi, si farà $22 : 7 :: 44 : x = \frac{44 \times 7}{22} = 14$; vale a dire, che il diametro cercato è presso a poco di 14 piedi.

74. PROBLEMA. *Ridurre un poligono qualunque $abcdf$* (Fig. 50.) *in un poligono di ugual superficie, e che abbia un lato di meno.*

Tirate la diagonale fc e per il punto d conducetele la parallela dp fino al concorso di af prolungata se così bisogna; dal punto c e dal punto p, ove queste linee concorrono, tirate la linea pc, la figura $abcp$ avrà evidentemente un lato di meno che la figura proposta, e di più le sarà uguale in superficie; perocchè con questa operazione togliete via il

trian-

triangolo fdc, ma insieme vi aggiungete il triangolo fcp; ora questi due triangoli sono uguali in superficie avendo la stessa base fc e la medesima altezza; stante che hanno i loro vertici sopra una stessa linea dp parallela alla lor base. Così procedendo coll' operazione si ridurrà $abcp$ in una figura di tre lati, vale a dire, in un triangolo.

COROLLARIO I. Dunque si può ridurre un poligono rettilineo in un triangolo di uguale superficie.

COROLLARIO II. Dunque si può quadrare qualunque poligono rettilineo; giacchè (71) si sà quadrare un triangolo.

OSSERVAZIONE. Si può avere la superficie di un poligono qualunque riducendo questo poligono in triangoli per mezzo delle diagonali tirate nel poligono; poscia cercando tutte le superficie di ciascun triangolo, la somma delle superficie darà la superficie del poligono. Per avere la superficie di un triangolo di cui sia nota la base, basta cercarne l' altezza per moltiplicarla per la metà della sua base; ora l' altezza si trova coll' abbassare una perpendicolare dal vertice di un angolo sul lato opposto, prolungato se così fa d' uopo, il qual lato dev' essere preso per la base del triangolo.

Supponghiamo che sia dimandata la superficie del triangolo ABC (Fig. 34.). Conducete dal vertice dell' angolo B la perpendicolare BP sulla linea AC presa per base del triangolo ABC; misurate la linea AC e la linea BP ch' è l' altezza del triangolo. Suppon-

ghia-

ghiamo che AC vaglia 300 tese, e BP 100 tese; moltiplicate AC = 300 tese per la metà di BP, o per 50 tese, il prodotto 15000 vi farà conoscere che la superficie del vostro triangolo è di 15000 tese quadrate.

Volendo misurare la superficie del triangolo rettangolo *cmn* (Fig. 43.), misurerete la base *mn*, ed il lato *cm* (questo lato è qui l'altezza del triangolo; perchè è perpendicolare sulla base *mn*) e moltiplicando *mn* per la metà di *cm*, il prodotto darà la superficie cercata. Se *mn* è di 400 tese e *cm* di 120 tese; moltiplicherete 400 tese per 60, metà di 120, il prodotto 24000 vi farà conoscere che la superficie del triangolo *cmn* e di 24000 tese quadrate.

75. DEFINIZIONE. *Il piano è una superficie unita che non ha nè profondità nè altezza. Un piano è perpendicolare ad un altro, allorchè lo incontra senza pendere dall' un lato nè dall' altro. Così pure una linea è detta perpendicolare sopra un piano, allorchè lo incontra senza piegare da alcun lato. Due piani si nominano paralleli, allorchè sono per tutto ugualmente discosti l' uno dall' altro, di modo che non possono concorrere per quanto essi siano prolungati.* Così il pavimento ed il soffitto di una camera sono ordinariamente paralleli.

Volendo conoscere l' inclinazione di due piani che concorrono, vale a dire l' angolo che formano tra loro due piani che s' incontrano, basta condurre da un punto della li-

nea

nea di loro sezione (ch' è quella in cui s' incontrano) due linee perpendicolari alla sezione , una delle quali sia in uno de' piani , l' altra nell' altro piano : l' angolo formato da queste linee sarà sempre uguale a quello formato dai piani.

PAR-

PARTE TERZA.

DELLA GEOMETRIA.

Dei Solidi.

76. IL *solido Geometrico*, di cui solo parleremo in questa parte, è un'estensione che ha le tre dimensioni lunghezza, larghezza e profondità. Un solido la cui grossezza sia uguale in tutta la sua lunghezza chiamasi *prisma* (Fig. 51.). Si può concepirlo formato dal moto del piano della base innalzantesi parallelamente a se stesso, cioè restando sempre parallelo alla sua prima posizione, rasente il lato *a d*, e lasciando da per tutto delle tracce d'una grossezza assai piccola. Il prisma appellasi *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagonale*, *esagonale* ec. secondo che il piano della base, nominato *piano generatore*, è un triangolo, un quadrilatero, un pentagono, un esagono, ec. Se il poligono generatore è un circolo, il prisma dicesi *cilindro* (Fig. 52.). Se il piano generatore è un parallelogramo, il prisma prende nome di *parallelepipedo*; e se il piano generatore è un rettangolo, il prisma si appella *parallelepipedo rettangolo*. Se il piano ge-

generatore è perpendicolare nel suo moto al lato *ad* (Fig. 51. e 52.) li *prismi* o li *cilindri* si dicono *retti*. Una linea retta tirata dal centro della base superiore al centro della base inferiore di un cilindro si nomina *asse* del cilindro, come p. e. la linea *pt* (Fig. 52.). Se l' asse è perpendicolare sulle basi superiore ed inferiore, che sono sempre parallele, il cilindro chiamasi *retto*; e se l'asse è obbliquo sulle basi, il cilindro sarà *obbliquo*. L' altezza del cilindro o del prisma obbliquo dee sempre valutarsi per via della perpendicolare condotta tra le due basi parallele, col prolungarne una se così occorre. Un *cubo* è un prisma retto, la cui base è un quadrato, e la cui altezza è uguale al lato di questo quadrato, cosicchè le sue sei facce formino 6 quadrati uguali siccome è un dado da giuocare (Fig. 53.).

La *piramide* è un solido che ha per base un poligono, ed ha per facce de' triangoli terminantisi in un punto M, (Fig. 54.). Se la base della piramide è un circolo (Fig. 55.) essa prende nome di *cono*. La linea M*x* tirata dal vertice del cono al centro *x* della sua base si chiama l'*asse* del cono, e se cotesto asse è perpendicolare alla base, il cono è *retto*; in caso diverso il cono appellasi *obbliquo*.

Solidi simili si dicono quelli che hanno uno stesso numero nè più nè meno di facce simili, e di cui tutte le dimensioni corrispondenti sono proporzionali.

77. COROLLARIO. Da ciò segue, che se si tirano due linee omologhe qualunque p. e. due diagonali corrispondenti, queste diagonali saranno dimensioni omologhe che saranno tra loro come i lati omologi dei solidi; di modo che se in un solido p. e. in un cubo, v' ha una linea di due piedi, e la linea corrispondente in un altro solido simile fosse di un piede, ciascuna linea del primo solido sarà doppia della corrispondente nel secondo, il che è evidente; altrimenti non sarebbe in piccolo il secondo solido ciò ch'è l'altro in grande, e li solidi non sarebbero simili.

78 Le facce di un solido qualunque terminato da figure piane e rettilinee essendo triangoli, quadrilateri o poligoni, si troverà la superficie di un solido col misurare quella delle facce ond'è terminato.

79. Egli è facil comprendere che ciascuna faccia della superficie laterale (cioè della superficie non compresevi le basi) di un prisma retto (Fig. 51.) è un rettangolo. Imperciocchè la faccia *admc* p. e. è ad evidenza un rettangolo avente *ac* per base, e *ad* per altezza. Suppongasi di tre piedi il lato *ac* della base, di due piedi il lato *cb*, ed il lato *ab* di quattro piedi. Suppongasi inoltre il lato *ad*, o *cm*, o *bn* di cinque piedi; se moltiplicate *ac* per *da* ossia tre per cinque, il prodotto quindici piedi quadrati, darà la faccia *acmd*. Moltiplicando *cb* per *bn*, il prodotto dieci piedi quadrati esprimerà la superficie della faccia *bnmc*. Finalmente moltipli-

can-

cando *ab* per *ad*; o quattro per cinque, il prodotto venti farà conoſcere che la faccia *adnb* è di venti piedi quadrati; ſicchè le tre facce vagliono $15+10+20=45$ piedi quadrati. Ma il perimetro *acb* della baſe vale $3+2+4$ oſſia 9 piedi; e col moltiplicare 9 per il lato $ad=5$ ſi avrà 45; vale a dire, che *ſi troverà la ſuperficie laterale di un priſma retto col moltiplicare il perimetro della baſe per il lato del priſma*. Indi cercando le ſuperficie della baſe ſuperiore ed inferiore che ſono uguali, ed aggiungendole alla ſuperficie laterale, ſi avrà la ſuperficie totale del priſma.

Se il priſma è obbliquo la linea *ac* ſarà obbliqua ſul lato *ad*, la faccia *dmca* ſarà un parallelogramo del quale troveraſſi la ſuperficie moltiplicando la baſe *ac* per una perpendicolare *pp* condotta tra le due baſi parallele *dm*, ed *ac*, queſta perpendicolare ſarà l'altezza del parallelogramo; lo ſteſſo pure dovrà eſſer fatto riguardo alle altre facce.

80. COROLLARIO. Poichè il cilindro non è, come ſopra abbiam detto, ſe non un priſma la cui baſe è un circolo, *ſi troverà la ſuperficie laterale di un cilindro retto, col moltiplicarne la circonferenza della baſe per il lato ad* (Fig. 52.). Laonde ſuppoſta di 10 piedi la circonferenza della baſe, ed il lato *ad* di 5, la ſuperficie laterale ſarà di 50 piedi quadrati. Riguardo poi alla ſuperficie della

base, si può trovarla in quello stesso modo che si trova quella del circolo (64) (*).

81. DEFINIZIONE. Chiamasi *piramide retta e regolare* quella la cui base è un poligono regolare, e di cui tutte le facce laterali sono triangoli uguali; tale è la piramide $abcM$ (Fig. 54.). Ma qualunque esser possa la piramide, o retta sia od obbliqua, si troverà sempre la sua superficie col misurare quella della

---

(*) Se il prisma è obbliquo (Fig. 56.) concepite una sezione MPN perpendicolare al lato ad; è manifesto che perpendicolare essendo il lato MP sopra i lati ad, mc del parallelogramo $acmd$, prendendo questi lati come basi del parallelogramo, si avrà la superficie moltiplicando la linea ad o la sua uguale cm per MP. Similmente, moltiplicando cm per PN si avrà la faccia $cmnb$, e la faccia $abnd$ col moltiplicare ad per MN. Se MP è di 2 piedi, PN di 3 piedi, MN di 4 piedi, ed ad, o cm, o bn di 5 piedi, la faccia $admc$ sarà di 10 piedi quadrati, la faccia $cmnb$ di 15 piedi quadrati, e la faccia $adnb$ di 20 piedi quadrati. Quindi la superficie laterale sarà di 45 piedi quadrati. Ma il perimetro della sezione MPN è di 9 piedi, e col moltiplicar 9 per $5 = ad$, si ha 45: dunque *si troverà la superficie laterale di un prisma obbliquo moltiplicando il perimetro di una sezione perpendicolare al lato ad del prisma per la lunghezza del lato medesimo*. D'altra parte il cilindro è un prisma avente per base un circolo; dunque supposto che il cilindro $adnb$ (Fig. 52) sia obbliquo, e sia contornato con un filo, talchè il piano del perimetro $MoNs$ sia perpendicolare al lato ad, moltiplicando la lunghezza $MoNs$ del filo, che suppongo di 9 piedi per il lato ad, che suppongo di 5, il prodotto 45 piedi quadrati sarà la superficie laterale del cilindro.

della base, e quella delle sue facce laterali (*a*):

K 3 82.

(*a*) Se supponghiamo retta la piramide della Fig. 54. tutte le sue facce laterali saranno uguali, come ora l'abbiam detto. Per avere la faccia M*cb*, moltiplicate il lato *cb* della base, cioè la base del triangolo M*cb* per la metà della linea M*p* che suppongo essere una perpendicolare abbassata dal vertice M sulla base *bc* del triangolo, e ne avrete la sua superficie. E poichè tutte le facce sono uguali tra loro; se moltiplicate la superficie trovata per 3 numero delle facce, avrete la superficie laterale totale. Supponghiamo *cb* di 4 piedi, M*p* di 10; moltiplicando la metà di M*p* per *cb*, il prodotto 20 indicherà, che la faccia M*cb* vale 20 piedi quadrati: e poichè sono tre le facce laterali uguali, la superficie laterale totale sarà di 60 piedi quadrati. Ma il perimetro *acb* della base è di 12 piedi, essendo che ciascun lato *cb* o *ac* o *ab* è di 4 piedi, M*p* ossia la perpendicolare abbassata dal vertice M della piramide sopra un lato *cb* qualunque (che nominasi l'*apotema* della piramide, allorchè la piramide è retta e regolare come qui la supponghiamo) è di 10 piedi; sicchè moltiplicando la metà del perimetro *acb* della base per l'apotema M*p* della piramide, avremo 60 piedi quadrati ossia la superficie della piramide. Da ciò possiamo conchiudere, che *la superficie laterale d'una piramide regolare e retta è uguale al prodotto del semi-perimetro della base per il suo apotema.*

Ma un cono retto *a*M*bx* (Fig. 55.) non è altro che una piramide regolare e retta la cui base fosse un circolo, ed il cui apotema M*p* fosse uguale al lato *a*M o *b*M del cono; dunque *la superficie laterale del cono retto è uguale alla semicirconferenza della sua base moltiplicata per il lato del cono*, oppure ciò che torna allo stesso, *al prodotto della circonferenza della sua base per la metà del lato del cono.*

Se si taglia la piramide per via d'un piano *fhi* paral-

82. Immaginatevi che un semicircolo *bMa* (Fig. 57.) giri attorno del suo diametro *ba*, e che lasci per tutto delle tracce; è manifesto che

---

rallelo alla base *acb*, si avrà una piramide tronca *acbbif* (Fig. 54). Le facce laterali di questa piramide saranno evidentemente trapezii uguali. La superficie del trapezio *cibb* è uguale (61) al prodotto della semi-somma delle parallele *cb*, *ih*, per la perpendicolare *pr* condotta tra esse parallele (perpendicolare ch'è l'apotema della piramide tronca retta) Moltiplicando questo prodotto pel numero delle facce, si avrà la superficie laterale totale. Conducete per li mezzi *m*, *n* de' lati *fa*, *hb* della piramide tronca il piano *mnt* parallelo alle basi superiore ed inferiore di essa piramide tronca, la linea *mn* parallela alle basi parallele *ab*, *fh*, la quale passa per lo mezzo de' lati *fa*, *hb* è uguale alla semi-somma delle linee parallele *fh*, *ab* (62). Per la stessa ragione, *tn* è uguale alla semi-somma delle linee *cb* ed *ih*. Anche *mt* è uguale alla semi-somma delle linee *ac*, *fi*; e perciò il perimetro *mtn* della sezione fatta parallelamente alle basi della piramide tronca retta e regolare, e che passa per lo mezzo del lato *fa* è uguale alla semi-somma dei perimetri delle due basi. Dal che possiamo concludere, che *la superficie laterale d'una piramide tronca e retta è uguale al prodotto dell'apotema di essa piramide per il perimetro mtn della sezione fatta per lo mezzo del lato fa parallelamente alle basi.*

COROLLARIO. Un cono retto *aMb* (Fig. 55) non altro essendo se non se una piramide retta la cui base è un circolo, *la superficie del cono retto tronco abcihf* (le cui basi superiore ed inferiore sono parallele) *si troverà moltiplicando il lato fa, ossia l'apotema pr di esso cono per la semi-somma dei perimetri delle due basi parallele. Questa medesima superficie sarà altresì uguale al prodotto dello stesso lato fa per il perimetro della sezione mtn che passa pel mezzo m del lato fa parallelamente alle due basi.*

Se

che descriverà esso la superficie di un solido rotondo nominato *sfera* o *globo*. Il punto M ugualmente distante da *a* e da *b*, descriverà un circolo M*f*N*u* il cui piano spartisce il globo in due parti uguali, e può chiamarsi l'*equatore* della sfera. Li punti *n* ed *m* descrivono de' circoli minori, dei quali non abbiamo rappresentato nella figura che i soli diametri. Li punti *a* e *b* su cui gira la sfera diconsi li *poli* della sfera il cui *asse* è il diametro *ab* che passa per li poli. Li *circoli maggiori* di una sfera sono quelli il piano de' quali passa pel centro *c* della sfera, o che hanno il medesimo centro della sfera. Li *circoli minori* per contrario hanno il loro centro fuori di quello della sfera. Il circolo *anb*N che passa per li poli della sfera si chiama *meridiano*; è esso evidentemente un maggior circolo della sfera. Il piano dell'equatore, e quello altresì d'ogni maggior circolo della sfera, dee tagliarla in due parti che sono evidentemente uguali; perocchè, per qual mai ragione una di queste parti sarebbe maggiore dell'altra?

Fate che un Torniajo od altro Artefice vi faccia un globo di piombo o di qualch' altra materia, nel quale l'equatore N*u*M*f* sia be-

K 4 ne

Se la piramide tronca fosse obbliqua, cercar dovrebbesi la superficie di ciascuna faccia in particolare; lo che facil sarebbe, essendochè ciascuna delle facce è un trapezio, e già ci è noto (16) il modo di misurare la superficie di questa figura.

ne espresso, che sia traforato da un picciolo buco nella linea *acb*, onde misurar ne possiate esattamente l'asse, e che abbiavi eziandio un meridiano *b*M*a*N. Aprite il compasso da M in *a*; egli è manifesto che l'arco *a*M sarà il quarto di un maggior circolo della sfera, sendo che tutti li punti dell'equatore sono evidentemente distanti ugualmente dal polo *a* come dal polo *b*: lo che fa che l'arco M*a* è uguale all'arco M*b*; e siccome l'arco *a*M*b* è una semi-circonferenza, l'arco *a*M sarà un quarto di circolo. Trasferite la medesima apertura da M in *f*, e stendete un filo da *f* in *a*; il filo (che potrete volendolo anneritlo) rappresenterà un quarto di circolo *fra*, che sarà il quarto di un meridiano. Fate disegnare o disegnate voi stesso quest' arco *fra*; è manifesto che la superficie sferica M*arf* compresa tra li tre archi di circolo M*a*, M*f*, *fra* sarà la metà della superficie M*b*N*f*M, o la metà della superficie della metà di un emisferio; e perciò sarà essa un' ottava parte di quella della sfera. Applicate sulla superficie M*af*M una di quelle sottili foglie di piombo, che dicesi piombo laminato, di modo che la foglia copra perfettamente questa superficie nè più nè meno. Sopra una foglia della stessa materia, e di ugual grossezza, descrivete un circolo il cui diametro A B sia = *ab*, ed il raggio A C = *ac*, tagliate il semicircolo A P B; se mettete questo semicircolo in un bacino d'una bilancia, e nell'altro la foglia ond'è coperta la superficie M*af*M trove-

verete pesar esse ugualmente; e poichè sono uguali in grossezza egli è manifesto esser uguali le lamine, ed essere uguale la superficie del semicircolo A P B all' ottava parte della superficie della sfera. Quindi potete inferire che la superficie totale della sfera vale 8 de' suoi semi-maggiori circoli, oppure quattro suoi circoli maggiori. Se alcuno non potrà fare comodamente questa esperienza, la supponga pur vera, e tenga già come verità riconosciuta da Matematici universalmente, che *la superficie d' una sfera è uguale al quadruplo di quella di uno de' suoi circoli maggiori* (*a*).

Se

(*a*) Possiamo ancora provare in altra maniera essere la superficie della sfera il quadruplo di quella di uno de' suoi circoli maggiori. Prima d' entrare in materia noteremo 1.° Che quando due ragioni sono uguali, si può mètter una in vece dell' altra in una proporzione. Le ragioni 6:3,2:1 essendo uguali, perchè ciascun antecedente contiene due volte il suo conseguente, si può nella proporzione 8:4::6:3 sostituire la ragione di 2:1 a quella di 6:3, e dire, 8:4::2:1. 2.° Che la piccola retta *mn* (Fig. 57.) che tocca l' arco *min* al punto *i* ugualmente lontano da *m* e da *n*, e che si confonde coll' arco medesimo, cui suppongo infinitamente piccolo, descrive girando intorno alla linea *ab* con quest' arco, la superficie di un picciolo cono tronco, di cui *nl* è il diametro della base inferiore; essendo *mp* diametro della superiore; il punto che sta nel mezzo di *mn* descrive una circonferenza di circolo di cui *ix* perpendicolare sopra *ab*, e parallela ad *nl* è il raggio; questa circonferenza descritta per lo mezzo del lato *mn*, parallelamente alle basi, moltiplicata pel suo lato *nm*, dà un prodotto uguale alla superficie laterale del cono

Se riuscisse soverchiamente difficile questa prova a' principianti, potranno attenersi all' altra che daremo nell' osservazione del n.° 86 ch'

---

no tronco descritto dalla linea mn, o dall' arco mn, (nota del n.° 81). 3.° Condotta essendo la linea mo perpendicolare sopra ng, e per conseguente sopra la parallela ix. (12), e il raggio ic della sfera, li triangoli mno, ixc saranno simili; imperciocchè essi hanno un angolo retto, l'uno in o l'altro in x; di più l'angolo c del maggiore è uguale all'angolo mno del minore, lo che intendesi agevolmente riflettendo che a cagione delle parallele no, ed ix gli angoli corrispondenti mnc, mix sono uguali (12); ma l'angolo cim retto essendo a cagione del raggio ci perpendicolare sulla tangente mn (21), gli angoli mix, cix vagliono insieme un angolo retto; di modo che mix, o il suo uguale mno è complemento di cix (8). Parimente icx è complemento di cix; perciocchè il triangolo ixc è rettangolo in x; dunque gli angoli mno, icx sono anch'essi uguali come gli angoli o ed x, e conseguentemente simili sono li triangoli mno, cix.

Ciò posto sarà facil l' intendere la dimostrazione seguente. Li triangoli simili mno, cix che hanno i loro lati omologi proporzionali danno la proporzione $ci : ix :: mn : mo$. Faccio $ci = R$, $ix = r$, la circonferenza del circolo di cui ci è il raggio $= C$, quella di cui ix è il raggio $= c$, $mn = a$, mo oppure $dg = b$ per avere la proporzione $R : r :: a : b$. Ora essendo li raggi R, r, come le circonferenze C, c di essi raggi (53), sostituisco la ragione di $C : c$ invece di quella di $R : r$, ed ho la proporzione $C : c :: a : b$ in cui il prodotto de' medii $a \times c = C \times b$, prodotto degli estremi. Ma il lato a o mn moltiplicato per c, circonferenza del raggio ix, dà la superficie descritta dall'arco infinitamente piccolo mn durante la rivoluzione del semicircolo aMb intorno all'asse ab,

e C

cn'è facilissima, e supporre intanto che la superficie della sfera è uguale a quattro suoi circoli maggiori.

Co-

---

e CX h indica il prodotto della circonferenza C di un maggior circolo della sfera per la linea mo o dg, o per l'altezza dell'arco mn, od anco per la parte dg dell' asse all' arco stesso corrispondente. Dunque per la stessa ragione, la superficie descritta dal semicircolo aMb, ossia la superficie della sfera sarà uguale al prodotto della circonferenza C d'uno de' suoi maggiori circoli per l'altezza ab della semicirconferenza aMb; imperciocchè, allorchè l'arco mn diventa una semicirconferenza bMa, la linea $dg = h$ diventa $= ba$. Dunque la superficie della sfera si trova moltiplicando la circonferenza di uno de' suoi maggiori circoli pel suo diametro.

Supponghiamo che sia dimandata la superficie d'una sfera il cui diametro sia di 21 piedi; cercate la circonferenza d'uno de' suoi maggiori circoli, dicendo $7 : 22 :: 21 : x = \frac{22 \times 21}{7} = 66$. Moltiplicate questa circonferenza pel diametro 21, il prodotto 1386 piedi quadrati vi farà conoscere essere la superficie cercata presso a poco di 1386 piedi quadrati. Si otterrebbe un risultato più esatto adoperando il rapporto di Mezio per trovare la circonferenza d'uno de' maggiori circoli della sfera.

Moltiplicando la circonferenza di un circolo per la metà del suo raggio o pel quarto del suo diametro, si ha (64) la superficie di esso circolo; dunque moltiplicando la circonferenza pel diametro intero si avrà un prodotto quattro volte maggiore; e conseguentemente la superficie della sfera vale 4 suoi maggiori circoli.

COROLLARIO I. Dunque la superficie d'una calotta sferica map è uguale al prodotto della circonferenza d'un maggior circolo della sfera per l'altezza ad della calotta medesima; e la superficie d'una zona

mn

COROLLARIO. Dunque la superficie d' una sfera che nominerò A, è alla superficie d' un' altra sfera B, come il quadruplo d' uno de' mag-

---

mnlp (ch' è parte della superficie sferica compresa tra due piani paralleli) è uguale al prodotto della circonferenza d' un maggior circolo per l' altezza *dg* della zona.

COROLLARIO II. *La superficie della sfera è uguale alla superficie laterale d' un cilindro ad essa circoscritto, vale a dire, che la tocca con un lato superiormente ed inferiormente* (Fig. 58): Imperciocchè la base di tale cilindro ha un diametro uguale a quello della sfera, e la sua altezza è uguale anch' essa al diametro *ab* della sfera: ma la superficie laterale del cilindro retto è uguale al prodotto del suo lato o del suo asse *ab* per la circonferenza della sua base, ch' è un maggior circolo della sfera. E poichè la superficie della sfera vale quattro suoi maggiori circoli, la superficie laterale del cilindro circoscritto varrà anch' essa quattro circoli maggiori della sfera medesima. Di più, le due basi del cilindro vagliono eziandio ciascuna un maggior circolo della sfera; quindi la superficie totale del cilindro circoscritto, compresevi le basi, vale sei maggiori circoli della sfera; oppure, ch' è lo stesso, la superficie della sfera è a quella del cilindro circoscritto come 4 : 6, o come 2 : 3.

Immaginatevi due cubi uno de' quali abbia il lato di un pollice, e due il lato dell' altro. E' manifesto che avrà il primo sei facce ciascuna delle quali sarà di un pollice quadrato, e che il secondo ne avrà sei ciascuna di quattro pollici quadrati, poichè il quadrato di 2 è 4. Perciò la superficie totale del primo sarà alla superficie totale del secondo, come 6 è a 24, o come 1 è a 4; vale a dire, come il quadrato del lato del primo, al quadrato del lato del secondo. Generalmente, *le superficie de' solidi simili sono tra loro come li quadrati delle loro dimensioni omologhe*; imperciocchè due solidi simili hanno tutte le loro dimensioni

maggiori circoli della prima, al quadruplo d' uno de' maggiori circoli della seconda, o come un maggior circolo della prima a un maggior circolo della seconda. In fatti il numero 6 è al numero 3 come quattro volte 6 è a quattro volte 3, o 6 a 3 come 24 è a 12; poichè 6 contiene due volte 3 come 24 contiene due volte 12. Ma li circoli sono come li quadrati de' raggi o de' diametri (67); quindi la superficie della prima è a quella della seconda come il quadrato del raggio della prima al quadrato del raggio della seconda, o come il quadrato del diametro della prima al quadrato del raggio della seconda. Perciò se il diametro della prima è di 5 piedi, quello della seconda di 2, la superficie della prima sarà a quella della seconda come 25 : 4.

83. Passiamo ora alla solidità de' solidi. Concepite che la base *acb* (Fig. 51) s'innalzi parallelamente a se stessa lungo il lato *ad*, e che lasci per tutto tracce d'ugual grossezza che possiam supporre tanto piccola quanto si vorrà; è manifesto che essa genererà col suo moto un prisma la cui solidità si trova moltipli-

---

sioni omologhe proporzionali, essendochè composte sono le loro superficie d'un ugual numero di facce simili, che sono poligoni simili, li cui lati omologi sono proporzionali, e le cui superficie sono come li quadrati di questi lati, che sono dimensioni omologhe; dunque tai superficie esser debbono in ragione de' quadrati de' lati o linee omologhe, o in ragione de' prodotti delle dimensioni proporzionali; vale a dire, come li quadrati delle dimensioni proporzionali.

tiplicando una delle tracce pel numero delle volte ch'è contenuta la sua grossezza nell'altezza che suppongo rappresentata dalla linea pp perpendicolare alle due basi del prisma. Dunque *la solidità di un prisma si troverà moltiplicandone la base per l'altezza*; e ciò o sia retto il prisma od obbliquo; imperciocchè due prismi l'uno retto e l'altro obbliquo di ugual base, altezza, e materia, pesano ugualmente.

84. OSSERVAZIONE. Le solidità de' solidi geometrici si misurano in tese cube, piedi cubi, pollici cubi, linee cube, ec. Una tesa cuba è un cubo il cui lato è una tesa, e contiene *216* piedi cubi, perchè la tesa contiene *6* piedi, e perchè *216* è il cubo di *6*. Il piede cubo vale 1728 pollici cubi, perchè il piede vale 12 pollici, e perchè il cubo di 12 è 1728. Parimente il pollice cubo vale 1728 linee cube, e la linea cuba 1728 punti cubi.

85. Per rendere più facile a' principianti l'intendere ciò che riguarda la misura del prisma, supponghiamo che la base $bgfd$ (Fig. 59) e la sezione parallela $pnPx$, sia d'un piede quadrato, e la grossezza della base sia d'un millesimo di piede, e che la distanza perpendicolare tra questa base, e la sezione sia d'un piede; è evidente che la figura $bdgfxPnp$ varrà un piede cubo, o mille volte il piano della base che per la supposizione, è la millesima parte d'un piè cubo; e se suppongasi che la linea ac condotta per lo mezzo delle due basi superiore e inferiore perpendicolarmente alle basi medesime sia di 4 piedi, è evidente che

che la figura *bdfglmti* varrà 4 piedi cubi. Ma 4 è il prodotto della base 1 per l'altezza 4 piedi o per $\frac{4000}{1000}$ di piede; perciò si troverà la solidità di questo solido col moltiplicare il piano della base pel numero indicante quante volte la sua grossezza è contenuta nell'altezza, od anche col moltiplicare la base per l'altezza non attendendo punto alla grossezza della base.

Supponghiamo p. e. che venga dimandata la solidità d'una muraglia lunga 20 tese, grossa 2, ed alta 10. Moltiplico la lunghezza 20 per la grossezza o larghezza, il prodotto 40 fa vedere che la base della muraglia è di 40 tese quadrate. Moltiplicando poscia questa base 40 per l'altezza 10, trovo 400; vale a dire, essere la solidità della muraglia proposta di 400 tese cube. Quindi se la tesa cuba costa un luigi, questa muraglia costerà 400 luigi.

Poichè il cilindro è un prisma la cui base è un circolo, *si troverà la solidità di un cilindro col moltiplicare la base per l'altezza, e ciò o retto sia il cilindro oppure obbliquo.*

86. Formate (Fig. 60.) con legno, o rapa, o pomo, o cera ec. un prisma ACDSRP, ed una piramide uguali in base ed altezza *bcda*; farete certo esser uguale l'altezza del prisma e della piramide, se questi due solidi sono contenuti tra le stesse parallele M*a*P, *f*DA. Ora se pesate la piramide ed il prisma, troverete pesar sempre il prisma tre vol-

te

te di più della piramide, talchè se la piramide pesa 4 libbre, il prisma ne peserà 12. Dal che potete inferire, *esser sempre una piramide il terzo di un prisma della medesima base e dell' altezza medesima*. Ma abbiamo ora veduto trovarsi la solidità del prisma moltiplicandone la base per l'altezza. Dunque troverassi la solidità della piramide col moltiplicarne la base per il terzo della sua altezza. Trattandosi poi di piramide obbliqua dev' esser stimata l'altezza per via della perpendicolare abbassata dal vertice della piramide sul piano della base, prolungato se così fa duopo; quindi l' altezza della piramide *fgha* è rappresentata dalla perpendicolare *a*N abbassata sul prolungamento *f*N del piano della base *fgh* (*a*).

Essen-

(*a*) La solidità de' prismi e delle piramidi può ancora dimostrarsi in questo modo. Siano due piramidi *bcda*, *fgha* (Fig. 60) le cui basi situate sul medesimo piano suppongonsi uguali, ed aventi la medesima altezza, perchè contenute tra gli stessi piani paralleli M*a*, *bh*. Se supponete un piano *xx* parallelo alli piani delle basi e che taglia le piramidi, è manifesto che la sezione *mon* sarà simile alla base *bcd*, e parimente la sezione *psi* sarà simile alla base *fgh*. Ma queste sezioni situate nello stesso piano parallelo alle basi sono ugualmente distanti dal piano su cui si trovano le basi, ed hanno conseguentemente uno stesso rapporto colle lor basi, o ciò che torna allo stesso, sono parti simili delle lor basi; talchè se la sezione *mon* è il quarto della base *bcd*, la sezione *psi* sarà anch' essa il quarto della base *fgh*. Ma per la supposizione queste basi sono uguali; dunque

Essendo il cono una piramide la cui base è un circolo, *la solidità d'un cono retto od obbliquo è uguale al prodotto della sua base*

Com. Sauri M. L *pel*

---

que le sezioni anch'esse sono uguali. Ora se si concepisce aver queste sezioni una stessa grossezza, è chiaro che sarannovi altrettanti membri di ugual grossezza in ciascuna piramide, quante volte questa grossezza sarà contenuta nell'altezza comune *a*N di esse piramidi; oppure, ch'è lo stesso, queste piramidi composte saranno d'un ugual numero di membri uguali; dal che potete concludere, che *due piramidi ch'hanno la medesima altezza, e le cui basi sono uguali, hanno solidità uguali.*

Concepite ora (Fig. 61) un cubo *abfcp*PD*d*, in cui la faccia superiore e tutte le altre facce essr debbono concepite come quadrati, cui è impossibile di rappresentare nella figura. Conducete le diagonali *d*P, D*p*, e dal punto *m* ove esse concorrono, il quale può esser riguardato come centro, e mezzo della base superiore, tirate la linea *m*N perpendicolarmente alla base inferiore, e per lo mezzo M di questa linea conducete delle linee agli angoli *a*, *b*, *f*, *c*, voi avrete una piramide che avrà per base una delle facce del cubo, e per altezza la metà di quella del cubo, cioè la metà del lato del cubo. Di più, egli è facil concepire che conducendo dal punto M delle linee agli altri angoli P, *p*, D, *d*, il cubo sarà diviso in piramidi uguali che avranno tutte il loro vertice al centro M del cubo, e per base una delle facce del cubo.

Ciò posto, poichè la piramide *abfc*M è la sesta parte del cubo, se supponghiamo che il lato *bf* del cubo sia d'una tesa, converrà moltiplicare la base del cubo, cioè una tesa quadrata o 36 piedi quadrati, per la sesta parte di *m*M o per un piede, cioè per il terzo di MN, o per il terzo dell'altezza della piramide; il prodotto 36 piedi cubici fa vedere essere la solidità di tale piramide di 36 piedi cubici.

Ge-

pel terzo della sua altezza. Supponghiamo che la base d'un cono, o d'una piramide sia di 50 piedi quadrati, e la sua altezza di 30 piedi

---

Generalmente, o rette siano, od oblique le piramidi, troverassi sempre la solidità loro col moltiplicar la base pel terzo di loro altezza. Diffatti è evidente doversi trovare in questo modo la solidità di due piramidi qualunque. Dunque se per avere la solidità dell'una si moltiplica la sua base pel terzo della sua altezza, si troverà parimenti la solidità dell'altra moltiplicandone la base pel terzo della sua altezza.

Volendosi misurare un obelisco, (vale a dire una piramide di pietra o di marmo) la cui base fosse di 12 tese quadrate, e l'altezza di 30 tese, avrebbesi a moltiplicare la base per il terzo dell'altezza, e troverebbesi la solidità di 120 tese cubiche.

Poichè per avere la solidità d'un prisma moltiplichiamo la base per l'altezza, mentre che troviamo la olidità della piramide moltiplicandone la base pel terzo dell'altezza, è evidente essere la piramide il terzo d'un prisma della stessa base e della medesima altezza.

Possiamo concepire la sfera come composta d'infinite piramidi uguali aventi il loro vertice al centro della sfera, la base di ciascuna delle quali è una porzione infinitamente piccola della superficie sferica, e la cui altezza è uguale al raggio della sfera medesima. Ma è facil intendere che la somma di tutte queste piramidi è uguale ad una sola piramide la quale avesse per base la superficie della sfera, e per altezza il raggio della sfera medesima.

Sarebbe adunque una tale piramide uguale al quadruplo d'un maggior circolo della sfera moltiplicato pel terzo del suo raggio, oppure, ch'è lo stesso, al prodotto d'un massimo circolo della sfera pel quadruplo del terzo del raggio, o per $\frac{4}{3}$ del raggio. Ma li $\frac{4}{3}$ del raggio sono lo stesso che li $\frac{2}{3}$ del diametro; per-

piedi, moltiplicheremo 50 per 10, e il prodotto 500 farà conoscere che la solidità del solido ricercata è di 500 piedi cubici.

---

perchè se il diametro è 12, il terzo del raggio sarà 2; li quattro terzi del raggio varranno 8, o li $\frac{2}{3}$ del diametro; dunque la solidità della sfera è uguale al prodotto d'uno de' suoi circoli massimi per li $\frac{2}{3}$ del suo diametro.

Dunque le solidità di due sfere sono tra loro come li prodotti de' due terzi de' loro diametri moltiplicati per uno de' loro circoli massimi; oppure, ciò che torna allo stesso, come li prodotti de' loro diametri per uno de' loro circoli massimi. Ma li circoli sono come li quadrati de' diametri; quindi la prima sfera sarà alla seconda come il prodotto del suo diametro che chiamo D moltiplicato pel quadrato D^2, dello stesso diametro, è al prodotto del diametro della seconda che chiamo d moltiplicato pel quadrato d^2 del diametro della seconda, cioè che la prima è alla seconda come D^3, cubo del diametro della prima, è a d^3, cubo del diametro della seconda. D'altra parte li raggi sono come li diametri; dunque *le solidità delle sfere sono altresì come li cubi de' loro raggi*. Se sono due sfere delle quali il diametro D d'una sia di 3 piedi, e il diametro d dell'altra di 2 piedi, la prima sarà alla seconda come il cubo di 3 al cubo di 2, cioè come 27 : 8.

Ora supponghiamo che sia dimandato di trovare la solidità d'una sfera il cui diametro fosse di 42 piedi. Cercate la circonferenza d'un circolo massimo della sfera, dicendo, $7 : 22 :: 42 : x = \frac{22 \times 42}{7} = 132$. Moltiplicando la metà 66 di tale circonferenza pel raggio 21, avrete la superficie di un circolo massimo espressa da 1386 piedi quadrati. Moltiplicando questa superficie per 28 o per li due terzi del diametro 42, co-

* OSSERVAZIONE. Concepir possiamo la sfera come composta d'infinite piramidi uguali aventi il loro vertice al centro della sfera, la

noscerete dal prodotto 38808 che la solidità d'una sfera di 42 piè di diametro è a un di presso di 38808 piedi cubici. Si avrebbe un più giusto risultato facendo uso del rapporto di Metio; tuttavia basta quello di Archimede ne' casi ordinarii.

Possiamo concepire la solidità di un solido qualunque come prodotto d'una superficie per una linea; e la superficie come risultato del prodotto di due linee; quindi ogni solido risulta dal prodotto di tre linee. Dunque due solidi simili sono tra loro come il prodotto di tre linee omologhe. Ma ne' solidi simili (76) proporzionali sono le dimensioni corrispondenti; dunque due solidi simili sono in ragione composta di tre dimensioni proporzionali, e conseguentemente in ragione triplicata d'una di queste dimensioni, oppure, ciò ch'è lo stesso, due solidi simili sono tra loro come li cubi delle loro dimensioni omologhe, e generalmente, come li cubi delle linee omologhe, o similmente condotte nei solidi.

COROLLARIO I. *Dunque le sfere sono in ragione triplicata del raggi e de' diametri*; imperciocchè le sfere sono solidi simili ne' quali li raggi e li diametri sono linee omologhe.

COROLLARIO II. Li cubi sono evidentemente solidi simili, e così pure li cilindri circoscritti alle sfere; imperciocchè in questi cilindri gli assi, e li diametri delle basi sono uguali: dunque li cubi sono in ragione triplicata dei lati, e li cilindri circoscritti alle sfere sono in ragione triplicata dei diametri di queste sfere, o degli assi de' cilindri. Generalmente, li prismi simili sono in ragione triplicata de' lati delle loro basi, de' loro perimetri, delle loro altezze; lo stesso è pure delle piramidi simili, che sono il terzo de' prismi simili, de' coni simili, che sono il terzo de' cilindri simili.

OSSER-

la base di ciascuna delle quali sia una parte infinitamente piccola della superficie sferica, e la cui altezza sia uguale al raggio della sfera. Ma è evidente che l'aggregato di tutte queste piccole piramidi è uguale ad una sola piramide o ad un cono la cui altezza fosse il raggio della sfera, e di cui la base fosse uguale alla superficie sferica. Dunque la solidità della

OSSERVAZIONE. Poichè un prisma è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza, due prismi sono in ragione composta delle basi e delle altezze. Dunque se le altezze di due prismi o cilindri, od anco di due piramidi, od anco di due coni (le piramidi sono il terzo de' prismi, e li coni il terzo de' cilindri della medesima base e della medesima altezza) sono uguali; questi solidi saranno tra loro come le loro basi; ma se le basi sono in ragione inversa delle altezze, cioè se l'altezza d'uno è a quella dell'altro come la base del secondo è a quella del primo, li prismi saranno uguali tra loro. Diffatti, sia la base d'un prisma che chiamerò A di 10 piedi quadrati, e la sua altezza di 6; sia la base d'un altro prisma che nominerò B di 5 piedi quadrati, e la sua altezza di 12; è evidente che la base del primo è a quella del secondo come l'altezza del secondo è a quella del primo; poichè 10 : 5 :: 12 : 6; quindi (Calcolo num. 35) l'altezza e la base del primo sono in ragione inversa dell'altezza e della base del secondo. Ora è facil vedere che il prodotto degli estremi 10 X 6, o il prodotto dell'altezza del primo prisma per la sua base, è uguale al prodotto 5 X 12, o al prodotto dell'altezza del secondo prisma per la sua base. Quindi le solidità di tai prismi sono uguali. Ciò che abbiam detto rispetto ai prismi ha luogo ancora per li cilindri paragonati tra loro e co' prismi, per li coni e le piramidi, sia che si paragonino li coni tra loro, le piramidi tra loro, o le piramidi coi coni.

la sfera si trova moltiplicandone la superficie pel terzo del suo raggio.

*. Ciò posto, se piglisi un cono la cui altezza sia uguale al raggio della sfera, e la cui base abbia un diametro doppio di quello della sfera, e sia per conseguenza quadruplo della superficie d'uno de' suoi circoli massimi (67), questo cono le sarà uguale in solidità; imperciocchè se questi due solidi sono della stessa materia p. e. di piombo, essi peseranno ugualmente. Ma la solidità di tal cono si trova moltiplicando il terzo della sua altezza, o del raggio della sfera, per la sua base ch' è quadrupla d'un massimo circolo della sfera; perchè li circoli sono come li quadrati de' diametri (67); dunque troverassi altresì la solidità della sfera moltiplicando il terzo del suo raggio per la stessa superficie; quindi la superficie della sfera è quadrupla d' uno de' suoi circoli massimi, come abbiam detto di sopra (82).

87. Appellasi *cilindro circoscritto ad una sfera* (Fig. 58.) *un cilindro retto che la tocca con un lato superiormente ed inferiormente, il cui asse ugualmente che il diametro della base è uguale al diametro della sfera.* Per ottenere la solidità di tale cilindro basta moltiplicare la superficie d'un circolo massimo della sfera inscritta per l'asse del cilindro, o pel diametro della sfera. Suppongasi formato un tale cilindro con rapa, o legno ec. in guisa che il suo asse sia uguale al diametro della sua base. Se fate un globo della stessa materia,

ria, che abbia il diametro uguale all' asse del cilindro, troverete pesar la sfera due terzi del cilindro circoscritto; di modo che se il cilindro pesa 6 libbre, la sfera ne peserà 4, se il cilindro pesa 3 libbre, la sfera ne peserà 2. Dal che potete concludere che *la solidità della sfera è a quella del cilindro circoscritto come 2 : 3*.

88. Per ottenere la solidità del cilindro circoscritto, si moltiplica la sua base, cioè un circolo massimo della sfera, per l'asse del cilindro, o pel diametro della sfera; dunque poichè la sfera è li due terzi del cilindro circoscritto, *si troverà la solidità della sfera moltiplicando un circolo massimo della sfera per li due terzi del suo diametro*.

89. Per ottenere la solidità del cubo, si moltiplichi la sua base (che non è se non il quarto del suo lato) pel lato del cubo medesimo; di modo che se il lato del cubo è un piede, dovrassi moltiplicare un piede quadrato per una linea di un piede, ed il prodotto sarà un piede cubo. Se pigliasi un altro cubo il cui lato sia di 2 piedi, la sua base varrà 4 piè quadrati, i quali moltiplicati pel lato o per 2 piedi daranno 8 piedi cubi; perciò il primo cubo sarà al secondo come 1 : 8, cioè le solidità di due cubi sono tra esse come li cubi de' loro lati, lo che parimenti si troverà col pesarli: imperciocchè se li cubi sono della stessa materia e sia il primo d'una libbra, il secondo peserà otto volte di più. Similmente se si pigliano due globi della stessa

materia, ed il raggio dell' uno sia doppio di quello dell'altro, il primo peserà 8 volte più che il secondo. Quindi *le sfere sono trà esse come li cubi de' loro raggi*. E perchè li diametri sono come li raggi, *le solidità delle sfere sono trà esse come li cubi de' diametri*. Generalmente troveremo sempre che *le solidità di due solidi simili*, vale a dire tali, che *l'uno sia in grande ciò ch' è l'altro in piccolo, sono trà esse come li cubi delle lor linee omologhe*; ora le linee omologhe sono quelle che si corrispondono, e che sono per conseguenza similmente situate.

Geometria Pratica.

90. Sia il circolo APBD (Fig. 62.). Prendete un arco BM minore di 90 gradi; dall'una delle estremità M di tal arco, conducete la linea MN perpendicolarmente sul raggio CB che passa per l'altra estremità B dell'arco medesimo, la linea MN appellasi *seno dell' arco* BM, o dell'angolo MCB misurato dall'arco. Similmente MN è il seno dell'arco APM, supplemento dell'arco MB. La linea BT perpendicolare all'estremità del raggio CB, e terminata dal prolungamento del raggio CM che passa per l'altra estremità M dell'arco BM, è appellata *tangente* dell'arco BM, o dell'angolo BCT misurato dall'arco. La linea CT compresa tra il centro C dell' arco BM e l'estremità T della sua tangente BT appellasi *secante* dell' arco BM

BM o dell' angolo BCT misurato dall' arco medesimo. E' facil cosa l' intendere che il seno d' un arco PB di 90 gradi è uguale al raggio CP del circolo (a).

91.

(a) Il complemento d' un arco è ciò che manca all' arco per valere 90 gradi ossia un quarto di circolo; quindi PM è il complemento di BM: La linea Pn tangente dell' arco PM chiamasi cottangente dell' arco BM; Cn secante di PM è la co-secante di BM; finalmente FM = CN è il seno di FM e il cosseno di BM.

Li triangoli CMN, CTB simili a cagione degli angoli retti in N ed in B; e dell' angolo comune TCB danno CN:MN::CB:BT, ossia il cosseno è al seno come il raggio è alla tangente; e nominando il seno *sen*, e il cosseno *cos*, il raggio *r* e la tangente dell' arco *tang*, si avrà cos:sen::*r*:tang = $\frac{r.\,sen}{cos}$. Se si dinota la cottangente PM per *cot*; e si rifletta che li triangoli PnC, FCM hanno ciascuno un angolo retto; e l' angolo in C comune, si vedrà esser eglino simili, e dare la proporzione FC = MN = sen:CP = *r*::FM = cos:Pn = cott = $\frac{r.\,cos}{sen}$; vale a dire, che la tangente di un arco è uguale al prodotto del raggio pel seno, dividendo il prodotto pel suo cosseno. Per contrario la cottangente si trova moltiplicando il raggio pel cosseno, e dividendo pel seno.

Conoscendo il seno d' un arco BM col raggio che sempre si tiene come noto, sarà facile di trovare il cosseno. Imperciocchè se dal quadrato dell' ipotenusa CM (che qui è il raggio) si tolga via il quadrato del lato MN ossia del seno, resterà (69) il quadrato del lato CM = FM, ch' è il cosseno; e prendendone la radice si avrà il cosseno. Se il raggio è di 5 piedi, il seno di 4, si sottrarrà 16 da 25, il residuo 9 sarà il quadrato del cosseno, che sarà 3 piedi.

Sia

91. Allorchè vogliamo fare sulla carta un angolo d'un numero determinato di gradi, ci serviamo d'un istrumento che appellasi *qua-dran-*

Sia supposto l'arco $Bx = a$, l'arco $xM = b$, ed $a > b$; conoscendosi il seno e il cosseno degli archi a e b, si troverà che il seno MN della somma $a + b$ degli archi a e b è $= \frac{\text{sen}.a \times \cos.b + \text{sen}.b \times \cos.a}{r}$, vale a dire, che il seno della somma di due archi a e b è uguale al prodotto del seno del maggiore pel cosseno del minore, più il prodotto del minore pel cosseno del maggiore; il tutto diviso pel raggio. Se gli archi a e b sono uguali, questa formula col sostituire a nel luogo di b diverrà $= \frac{2\,\text{sen}.a \times \cos.a}{r}$.

Di più, abbiam trovato che il seno d'un arco di 30 gradi è uguale alla metà del raggio del circolo che possiam supporre diviso in 10000000 di parti, sicchè facendosi la proporzione $113 : 355 :: 20000000 : x$ il quarto termine di tal proporzione farà conoscere il numero delle parti della circonferenza d'un circolo il cui diametro è supposto di 20000000 di parti. Dividendo il numero delle parti della circonferenza pel numero de' secondi che contengono 360 gradi, si avrà il numero delle parti dell'arco d'un secondo, e sarà quest'arco più o meno lungo, secondo che saranno più o meno grandi le parti del diametro. Se le parti del diametro sono piedi, la lunghezza dell'arco suddetto sarà 12 volte maggiore che se le dette parti fossero pollici. D'altra parte, poichè un arco di un secondo si confonde sensibilmente col suo seno, potremo senza disordine alcuno supporlo uguale.

Ciò posto, supponendo che gli archi a e b siano ciascuno di un secondo, e sia noto il loro seno (e conseguentemente il loro cosseno nel modo sopra indicato) si otterrà il seno di un arco di due secondi mercè la formula $\frac{2\,\text{sen}.a \times \cos.a}{r}$. Ora supposto che a rap-

drante il quale si trova in tutti gli astucci matematici. Desso è un semicircolo di rame o di corno come *amb* (Fig. 63.) il cui orlo tutto

---

a rappresenti l'arco di due secondi e *b* quello di un secondo, si avrà il seno di un arco di tre secondi mercè la formula $\frac{\text{sen}.\,a \times \cos.\,b + \text{sen}.\,b \times \cos.\,a}{r}$. Se in questa formula medesima *a* rappresenta l'arco di 3 secondi e *b* quello di un secondo, si avrà il seno di un arco di 4 secondi, e così di mano in mano ascendendo da secondo in seconde troverassi il seno, e per conseguente il cosseno di tutti gli archi, o degli angoli misurati cogli archi medesimi insino a 90 gradi. Ma dati essendo il seno e il cosseno d'un arco col raggio ch'è sempre giudicato noto, si trovano facilmente le tangenti e le cottangenti. Quindi potremo costruire una tavola la quale, supponendo il raggio di 10000000 di parti conterrà il valore dei seni, cosseni, tangenti, e cottangenti da un secondo o minuto insino a 90 gradi. Essendo il seno di 30 gradi uguale al raggio, si avrà sen. 30 gradi = 5000000. Questi sarebbero li seni e cosseni naturali, le tangenti e cottangenti naturali. In quanto ai seni e cosseni artificiali si troveranno col pigliare i logaritmi de' numeri rappresentanti le linee. Lo stesso dicasi rispetto alle tangenti e cottangenti artificiali. Nelle Tavole del Sig. Ab. la Caille vi sono soltanto li seni e cosseni artificiali colle tangenti e cottangenti artificiali.

Riguardo ai seni degli archi maggiori di 90 gradi convien notare, che l'arco AL ha lo stesso seno LR che l'arco LB, supplemento dell'arco AL; essendo che il *supplemento* dell'arco, o dell'angolo è ciò che manca all'angolo o all'arco per valere due angoli retti o 180 gradi; similmente il cosseno, la tangente, la cottangente d'un arco o d'un angolo sono di ugual lunghezza rispettivamente che il cosseno, la tangente e la cottangente del supplemento dell'arco. Quindi

voto

tutto è diviso in 180 gradi. In esso trovasi una doppia divisione; l'una comincia dal lato *a*, l'altra da quello di *b*; l'una ha rapporto al semicircolo interno *anb*, l'altra all'esterno *bma*. Supponghiamo che vogliasi fare un angolo *bcm* di 72 gradi; tirate la linea *cb*; applicate poscia il diametro del quadrante sulla linea in guisa che il centro *c* dell'istrumento vada a cadere sull'estremità *c* della linea medesima; cercate sull'orlo interiore andando da *b* in *n* la divisione 72 corrispondente al punto *m* dell'orlo esteriore; segnate il punto *m*, e tirate per li punti *c* ed *m* la linea *cmf*, l'angolo *ncd* sarà di 72 gradi; sendo che avrà per misura un arco *nb* di 72 gradi. Volendo fare un angolo di 72° 30'; segnate il punto *m* che corrisponde alla metà dell'intervallo ond'è separata la divisione 72 dalla divisione 73, e supponendo che la linea *cm* passi

noto che sia il seno di un angolo di 80 gradi, si conoscerà anche quello di 100 gradi, ch'è il suo supplemento.

Se conducete il raggio CP perpendicolarmente sulla corda *an* (Fig. 57), vedrete facilmente ch'esso la divide in parti uguali, insieme coll'arco *a*P*n* la cui metà *a*P è la misura dell'angolo inscritto *a*G*n* (n.°28) di modo che *ap* seno dell'arco *a*P, è seno dell'arco inscritto *a*G*n* misurato dall'arco medesimo. Dal che si deduce che il seno di un angolo *a*G*n* è la metà *ap* del lato opposto *an*: Parimente il seno dell'angolo G*an* sarà la metà del lato G*n*, ed il seno dell'angolo *an*G la metà del lato *a*G. Ma le metà sono nel rapporto dei tutti; dunque *li seni degli angoli d'un triangolo sono tra loro come li lati opposti agli angoli medesimi.*

passi per un tal punto, l'angolo *bcm* sarà evidentemente di 72° 30'.

92. Se dal punto *c* col raggio *cd* descrivete il circolo *dfght*, è manifesto che li circoli concentrici *fd*, *nb* misurano il medesimo angolo *fcb*, e quindi che l'arco *fd* è di 72 gradi. Ma un arco di 72 gradi è la quinta parte della circonferenza del circolo che vale cinque volte 72 gradi o 360 gradi; dunque nella circonferenza *dfght* vi sono cinque archi uguali ciascuno all'arco *fd*; e perciò portando la corda *fd* di tal arco cinque volte sulla circonferenza del circolo, avremo un pentagono regolare inscritto nel circolo. Se avessimo pigliato l'arco *bn* di 60 gradi, l'arco *fd* sarebbe stato parimente di 60 gradi, ed in tal caso portato avremmo sei volte la corda *fd* di esso arco sulla circonferenza del circolo onde avere un esagono regolare inscritto nel circolo. Ne' quadranti di corno che oggidì sono in tutti negli astucci matematici, si trova l'angolo *ncb* che ha rapporto al pentagono, quello che ha rapporto all'esagono, all'eptagono, ed in genere vi si trova l'angolo al centro che far debbono due raggi *fc*, *dc* d'un poligono regolare, dal triangolo equilatero fino al dodecagono inclusivamente; ora dato quest'angolo, egli è facil intendere dal fin qui detto quanto sia facile il descrivere il poligono regolare cui appartiene.

93. Volendo sapere quanto vaglia l'angolo *gfd* formato da due lati di un poligono regolare, si noti che il raggio obbliquo *cf* divide

vide cotesto angolo in due ugualmente (37); in guisa che l'angolo cfd, essendo uguale all' angolo cdf, perchè sono opposti a due lati uguali cf, cd (33); è la metà dell'angolo gfd; quindi li due angoli cfd, cdf presi insieme sono uguali all' angolo totale gfd: E perciò se dalla somma dei tre angoli del triangolo fcd leverassi via l'angolo al centro fcd, rimarrà il valore dei due angoli cfd, cdf, ossia il valore dell'angolo gfd, che dicesi *angolo alla circonferenza*. Trattandosi di un pentagono regolare, si toglierà via l' angolo fcd, vale a dire, 72 gradi dal valore 180 gradi delli tre angoli del triangolo fcd; e resteranno 108 gradi, valore dell' angolo gfd alla circonferenza.

Trattandosi di un esagono, l'angolo al centro sarà misurato da un arco di 60 gradi, o da una sesta parte della circonferenza; dunque levando via 60 gradi da 180 gradi, si avranno 120 gradi pel valore dell'angolo alla circonferenza.

94. Possiamo far uso del quadrante per misurare un angolo delineato sulla carta, come p. e. l'angolo fcd. Imperciocchè applicando il diametro del quadrante su l' un de' lati cd dell' angolo, sicchè il centro dell'istrumento cada sul vertice dell'angolo, si noterà a qual divisione corrisponda il lato cf. Se corrisponde alla settantesima seconda divisione andando da b verso n, l' angolo fcd sarà di 72 gradi; se il lato fc corrisponde alla metà della divisione che separa il settuagesimo secondo

gra-

grado dal settuagesimo terzo, l'angolo *fcd* sarà di 72° 30'; se il lato *fc* corrisponde al primo terzo della divisione suddetta, l'angolo sarà di 72° 20', ec.

93. Il *grafometro* è un semicircolo graduato A *b* B (Fig. 64.) armato di traguardi A e B, *a* e *b*. Li due primi sono stabili e situati alle estremità del diametro A B; gli altri due stanno alle estremità *a b* di un regolo mobile sul centro C dell'istrumento, e chiamasi *alidada*. Per misurare l'angolo *m* C *n* sul terreno, metto il centro del grafometro al vertice C dell' angolo proposto; metto il piano del grafometro sul piano dell'angolo che voglio misurare; lo che è facile, stante che l'istrumento è mobile per molti versi sul suo centro C; dirigendo il diametro immobile verso *m*, e l' alidada verso *n*, guardo sul lembo dell'istrumento di quanti gradi è l'arco B *b*. Se l'arco è di 40 gradi, l'angolo *m* C *n* sarà di 40. In vece di traguardi si mettono eziandio de' cannocchiali.

Volendosi misurare un *angolo verticale*, cioè un angolo, li cui lati si trovino in un *piano verticale* o perpendicolare all' orizzonte, sarà bene che il grafometro porti un filo a piombo nel suo centro, ed allora il piano del grafometro dovrà essere verticale, e situato come si vede nella figura 65. Laonde per misurare l'angolo D *n* P, supponendo che l' oggetto D sia in aria, e l'oggetto P situato in una linea orizzontale C A, si dovrà disporre in guisa il grafometro che il suo diametro

A B

AB sia orizzontale, lo che si conoscerà per mezzo del filo a piombo CM, che in tal caso dee corrispondere a 90° sulla circonferenza del grafometro, stante che il filo a piombo essendo sempre perpendicolare all' orizzonte, l'angolo ch' egli forma con una linea orizzontale dee sempre esser retto; perciò l'angolo MCB fatto dal filo a piombo e dal diametro del grafometro sarà retto, allorchè il filo CM corrisponderà a 90°. Ciò posto, per misurare l'angolo D*n*P, messo che si abbia il diametro AB in situazione orrizzontale ABV, ed il filo a piombo in situazione verticale o perpendicolare all'orizzonte, di modo che la circonferenza del grafometro sia sempre volta verso la terra (conosceransi essere il piano dell' istrumento nella situazione dovuta allorchè il filo a piombo potrà scorrere facilmente sul suo piano senza nè scostarsi nè appoggiarsi su d' esso,) ed il punto C sul punto *n*, e dirigendo l' alidada mobile *ab* verso l' oggetto D; si piglierà per misura dell' angolo cercato l' arco B*r* preso dal punto B fino all' alidada. Di fatti, l'angolo DCP è = BC*r* (suo opposto al vertice;) ma questo ha per misura l' arco B*r*; laonde anche l'angolo DCP ha per misura l' arco medesimo.

96. OSSERVAZIONE. Per fare sul terreno un angolo *m*C*n* (Fig. 64.) di un numero determinato di gradi p. e. di 30°, e supponendo che si dimandi di fare in guisa un tal angolo che C*m* sia uno dei lati dell' angolo; io trasporto il centro del grafometro al dissopra del pun-

punto C ; dirigendo il suo diametro verso l' oggetto m e disponendo l' alidada sulla divisione 30 ; faccio piantare un palicciuolo in n nella dirittura dell' alidada , e sarà sciolto il problema . Imperciocchè l' angolo mCn ha per misura un arco Bb di 30°. . Se non fosse stata data la linea Cm, si potrebbe prenderla a piacere . Se si volesse che l'angolo mCn fosse di 55°, si dovria mettere l' alidada sulla cinquantesima quinta divisione ; sulla sessagesima , qualor se ne volesse uno di 60°, ec. contando dal punto B.

97. La *Scala* (Fig. 65.) non è altro che una linea divisa in un dato numero di parti uguali . Qui p. e. la linea fg si suppone divisa in 40 parti uguali .

98. Supponghiamo che venga proposto di misurare l'altezza della torre accessibile DP (Fig. 65). Trasportate il centro del grafometro al punto C e misurate per mezzo dell' istrumento l' angolo DCP facendo in modo che la linea CP sia orizzontale, retto essendo l'angolo P, perchè la linea DP ossia la muraglia della torre è verticale , cioè perpendicolare all' orizzonte . Nel triangolo rettangolo CDP , voi conoscete l' angolo retto P, e l'angolo DCP che avete misurato ; dunque conoscerete il terz' angolo PDC. Ora suppongo che l' angolo DCP sia stato trovato di 45°, e la linea CP di 25 tese , potrei in tal caso supporre che ciascuna delle divisioni della scala fg valesse 5 tese ; perciò prendendo col compasso cinque di queste divisioni,

tiro la linea *cp* uguale alla linea *fs*; faccio poscia col mio quadrante un angolo *dcp* di 45 gradi, ed all'estremità *p* della linea *cp* l'angolo *cpd* di 90°. Prolungando le linee *cd*, *pd* finchè s'incontrino in *d*, avrete il triangolo *cdp* gli angoli del quale saranno uguali, ciascuno a ciascuno, a quelli del triangolo CDP. Trasportate ora la linea *pd* sulla scala, troverete ch'ella contiene 5 delle sue parti. Ma essendochè questi triangoli sono equiangoli, l'uno sarà in piccolo ciò che l'altro è in grande; laonde farete questa proporzione; il numero delle parti della scala che contiene *cp* è al numero delle tese che contiene CP, come il numero delle parti della scala che contiene *pd* è al numero delle tese che contiene PD; dunque avremo qui la proporzione $5:25$ tese $::5:x=\frac{125}{5}$ tese $=25$ tese, vale a dire, che l'altezza PD della torre sarà di 25 tese (*a*).

99. Se la torre non fosse accessibile, dopo aver

(*a*) Volendosi far uso del calcolo si osservi che essendo il seno degli angoli nel rapporto dei lati opposti (nota del num. 90) avremo la proporzione sen. D:CP::sen.C:DP. Cercando li seni degli angoli D e C nelle Tavole, troveremo il valore di DP. Facendosi uso dei logaritmi de' seni, cioè de' seni artificiali cambierassi la proporzione geometrica in proporzione aritmetica, si sostituirà il logaritmo di 25 in vece di CP, e troveremo il logaritmo di DP. Cercando questo logaritmo nelle Tavole troveremo a lato il numero cui esso corrisponde. Se il numero è 25, DP sarà di 25 tese.

aver misurato l'angolo DCP, si dovrà andar lontano sulla linea orizzontale CV, e prendere il punto V per nuovo punto di stazione. Dovrassi adunque misurar l'angolo DVP colla linea VC. Supponghiamo che sia questa linea di 25 tese, e che vaglia, come sopra si è detto, 5 tese ciascuna divisione della scala; si tirerà la linea *ucp*, si farà *uc* uguale a cinque parti della scala, ed inoltre l'angolo *dup* uguale all'angolo DVP. Supponghiamo che quest' ultimo angolo sia stato trovato di 22° 30', si farà (per mezzo del quadrante num. 91.) l'angolo *dup* di 22° 30'. Si farà altresì l'angolo *dcp* di 45°, perchè l'angolo DCP è di 45°; si tirino le linee *ud*, *cd* le quali concorreranno al punto *d* e da esso si abbassi la perpendicolare *dp* sulla linea *ucp*; questa perpendicolare farà conoscere l'altezza DP della torre; imperocchè è manifesto che il triangolo *udp* è in piccolo ciò ch'è il triangolo VDP in grande; quindi *dp* conterrà altre tante parti della scala *fg* quante volte la linea DP contiene cinque tese.

Laonde se portando la linea *dp* sulla scala *fg* troveremo valer la linea cinque parti della scala; concluderemo che la linea DP vale 25 tese; a quest' altezza conviene aggiungere quella del grafometro. Se esso è di 4 piedi, l'altezza totale della torre fuori del terreno sarà di 25 tese e 4 piedi.

106. Suppongasi ora proposta di misurare l'altezza PD fuori di terra d'una torre per mezzo della sua ombra PC (Fig. 66.) sup-

ponendo che il terreno PC sia a livello. Pigliate una canna *dp* di una data lunghezza p. e. di 4 piedi, tenetela in situazione verticale o perpendicolare alla linea orizzontale *cp*, e misurate la sua ombra *cp*. Dite poscia, la lunghezza dell' ombra *cp* della canna è alla lunghezza *pd* della canna medesima, come la lunghezza CP dell'ombra della torre è all' altezza PD della torre medesima. Suppongasi trovata la lunghezza dell'ombra della torre di 20 tese, e misurandosi subito dopo l' ombra della canna *pd*, sia stata trovata di 8 piedi, si farà la proporzione seguente : l'ombra 8 piedi della canna sta all'altezza 4 piedi della canna medesima, come 20 tese, ombra della torre, sta ad *x*, altezza della torre, ossia $8:4::20:x=\frac{80}{8}=10$ tese, vale a dire che l' altezza della torre sarà di dieci tese. Questo metodo è fondato sull'esperienza da cui sappiamo che le lunghezze delle ombre ne' luoghi medesimi e ne' medesimi tempi sono proporzionali all'altezza degli oggetti da cui partono.

101. Proponghiamoci ora da misurare la larghezza CD di un fiume che non si può tragittare (Fig. 67). Prendete una base qualunque CP sulla sponda CP, e dirigendo il diametro del grafometro in modo che stia nella linea PC, mettete il piano dell'istrumento in situazion conveniente, sicchè per mezzo dell' alidada immobile veder possiate un oggetto alquanto notabile situato in P come p. e. un palicciuolo, e per mezzo dell'alidada mobile

bile veder possiate la riva opposta DM. Mettete allora l'alidada mobile sulla divisione di 90°; onde avere l'angolo DCP retto; trasferitevi poscia al punto P, e misurate l'angolo CPD, dirigendo l'alidada immobile verso C, e l'alidada mobile verso il punto D. Fate col mezzo del quadrante l'angolo *dcp* uguale all'angolo DCP. Suppongasi che la linea CP da voi misurata sia di 50 tese; se volete che ciascuna divisione della scala *fg* (Fig. 65.) vaglia 5 tese, converrà prendere 10 divisioni per la linea *cp*; se per contrario volete che ciascuna divisione della scala *fg* vaglia 10 tese, basterà prenderne 5; se si volesse che ciascuna divisione valesse 20 tese, se ne prenderebbero due e mezzo. Supponghiamo che sia presa *cp* in modo che la linea vaglia 5 divisioni della scala *fg*, si farà al punto *p* l'angolo *cpd* uguale all'angolo CPD. Supponghiamo che il secondo angolo trovato sia di 45° e che l'angolo DCP sia retto, porterete la linea *cd* sulla scala *fg* e troverete corrispondere questa linea a 5 divisioni della scala medesima; ma ciascuna divisione vale 10 tese; dunque la linea *cd* rappresenterà 50 tese; ma questa linea *dc* rappresenta la linea DC o la larghezza del fiume; sarà adunque di 50 tese la larghezza ricercata (*a*).

M 3 102.

(*a*) Volendo adoperare li seni artificiali o li logaritmi de' seni si farà questa proporzione aritmetica sen. D. logaritmo di CP : sen. P. logaritmo di CD

Se

102. OSSERVAZIONE. Possiamo misurare la larghezza del medesimo fiume senza che sia mestieri di fare il picciol triangolo *dcp* e senza calcolo alcuno. Imperciocchè quando abbiasi preso un luogo conveniente sulla sponda CP, si cercherà un punto C, di modo che l'angolo DCP il quale sarà formato dalle due alidade, l'una mobile diretta verso un oggetto notabile D situato sulla opposta sponda, l'altra immobile diretta verso un oggetto notabile situato sulla sponda CP, sia retto. Dovrassi camminare sopra la linea CP prolungata quanto sarà necessario, finchè si arrivi ad un punto P tale che l'angolo CPD sia di 45°, lo che non sarà gran fatto difficile; perciocchè se troverassi quest' angolo maggiore converrà discostarsi ancora più da C, e se minore converrà andargli vicino. Ciò posto io dico che la larghezza DC del fiume è uguale alla

---

Se si suppone che l'angolo P sia di 50 gradi, l'angolo D di 40 gradi ed il lato CP di 150 tese si avrà 9.808067.2.176091:9.884254.DP. Per avere DP, aggiungo insieme li due medii, e sottraggo il primo estremo 9.808067 dalla lor somma, il resto 2.152278 è il logaritmo di CD. Ma questo logaritmo è poco diverso da quello di 179; quindi CD è quasi di 179 tese. Per maggiore esattezza si potrebbe esprimere CP in pollici, senza fallare di un pollice nella lunghezza CD. Quando i logaritmi non sono esatti, ed abbiasi ridotto p. e. in pollici il lato conosciuto, basterà prendere il logaritmo il più approssimato. Ma non è mia intenzione di sviluppar tutta questa materia di cui ho parlato assai nelle mie Istituzioni Matematiche, e nel Volume primo del Corso completo di matematiche.

alla linea CP, di modo che se fosse questa linea di 100 tese, sarà ancora di 100 tese la larghezza del fiume. Diffatti poichè nel triangolo rettangolo CDP v'è oltre l'angolo retto, un angolo P di 45°; è evidente che l'altro angolo dev'esser anch'esso di 45°, perciocchè gli angoli di un triangolo vagliono due angoli retti. Dunque, come è detto di sopra (33), li lati CP, CD opposti agli angoli uguali P, D sono uguali, cioè la larghezza CD del fiume è uguale alla linea CP.

193. Ci possiam servire degli stessi principii per misurare l'altezza d'una montagna MDN (Fig. 30). Imperciocchè avendo presa la base orizzontale TC di un determinato numero di tese p. e. di 50, misurate col grafometro gli angoli DCM, DTM, e supposto che ciascuna parte della scala *fg* vaglia 10 tese, fate la linea *tc* uguale a cinque parti della scala *fg* (Fig. 65); dappoi fate l'angolo *dcp* uguale all'angolo DCP, e l'angolo *dtc* uguale all'angolo DTC. Misurate la linea CM, cioè la distanza dal punto C alla falda M della montagna. Se questa linea è di 50 tese, prenderete la linea *cm* uguale a 5 parti della scala *fg*; dai punti *m* e *d* condurrete la linea *md*, ed abbassando dal punto *d* la perpendicolare *dp* sulla linea *tmp*, questa perpendicolare vi darà l'altezza PD della montagna. In fatti è manifesto essere il triangolo *cpd* in piccolo ciò ch'è il triangolo CPD in grande. Dunque se la linea *dp* corrisponde a 5 divisioni della scala *fg*, valendo, per la supposi-

zione, ciascuna di esse 10 tese, l'altezza della montagna sarà di 50 tese. Se la linea *dp* corrispondesse a 20 divisioni della scala, l'altezza della montagna sarebbe di 200 tese. E' facil cosa il conoscere che l'altezza PD della montagna non è altro se non se la distanza della sua cima D alla linea orrizzontale TMP la quale passa per la radice M della montagna, e pel piano TCM. Ora questa distanza DP è evidentemente una linea condotta dal punto D perpendicolarmente sulla linea TM prolungata fino in P dentro della montagna.

104. E'agevole altresì di misurare il pendìo DM della montagna medesima; perciocchè tale pendìo è ad evidenza rappresentato dalla linea *dm*; dunque se questa linea *dm* vale 8 parti della scala *fg*, ciascuna delle quali, per la supposizione, rappresenti 10 tese, il pendìo DM valerà 80 tese. Se ciascuna divisione della scala rappresentasse 100 tese, la linea *dm* rappresenterebbe 800 tese, ed il pendìo DM sarebbe di 800 tese.

105. Proponghiamoci ora di levare una carta geografica (Fig. 69.) in un terreno livellato. Prendete una base *ab* che non sia a vista d'occhio minore dell'ottava o decima parte della distanza dei due oggetti li più lontani che rappresentar vorrete sulla carta. Quando abbiate misurato la linea *ab*, prendete col grafometro la grandezza degli angoli *dab*, *cab*, *nab*, *mab*, *xab*. Trasferitevi poscia da *a* in *b*, e misurate gli angoli *nba*, *cba*, *dba*, *xba*, *mba*. Se volete metter sulla carta l'ogget-

oggetto *h* che può bensì vedersi dal punto *b* e dal punto *n* ma non dal punto *a*, prendete *bn* per base, e misurate dal punto *b* l'angolo *hbn*, e poscia trasferendovi al punto *n*, misurerete l'angolo *hnb*. Lo stesso pure dovrà farsi quando l'angolo *ahb* fosse di soverchio ottuso od acuto, benchè si possa vedere l'oggetto *h* dai punti *a* e *b*; perciocchè abbiamo dall'esperienza che un picciolo errore nella grandezza di tal angolo è capace di produrne uno assai notabile nella distanza *ah*. Ora, per ben travagliati che siano li grafometri, non vi sarà giammai sicurezza aver essi quella esattezza geometrica che si desidera. Ciò fatto, supponghiamo che *ab* sia di 1000 tese; prendete una linea *ab* di 10 parti della scala *fg* (Fig. 65.); ed in tal caso ciascuna delle sue parti varrà 100 tese. Fate poscia in *a* ed in *b* gli angoli *dab*, *cab*, *nab*, *nba*, *hba*, ec. quali trovati gli avrete nell' operazione, e tirando le linee *da*, e *db*, queste due linee determineranno col loro concorso, la posizione dell'oggetto *d*. Parimente dal concorso delle linee *ac*, *bc* verrà determinata la posizione dell'oggetto *c* ec. Tirate dipoi la linea *nb*, e fate gli angoli *hnb*, *hbn* della grandezza trovata; così avrete la posizione dell'oggetto *h*, e la carta sarà levata. In fatti è chiaro che gli oggetti *d*, *c*, *n*, *h* ec. situati sono sulla carta come lo sono sul terreno; di modo che le linee e li triangoli, che veggiamo sulla carta, sono in piccolo ciò che le linee e li triangoli corrispondenti sono in grande

sul

ſul terreno. Volete voi conoſcere la diſtanza degli oggetti *nh*? Aprite il voſtro compaſſo da *n* in *h*, portatene l'apertura ſulla ſcala *fg*. Se eſſa corriſponde a 5 diviſioni della ſcala, eſſendochè ciaſcuna di queſte diviſioni rappreſenta per ſuppoſizione 100 teſe, la diſtanza cercata ſarà di 500 teſe. Se l'apertura del compaſſo corriſpondeſſe a cinque diviſioni e mezzo, la diſtanza *nh*, ſarebbe di 550 teſe.

106. Li principii da noi ſtabiliti baſtano per fare capire a' principianti come ſi poſſa miſurare un terreno a livello. Se il terreno foſſe un triangolo *adb* (Fig. 49.), camminerete ſulla linea *ba*, prolungata ſe fa duopo finchè dirigendo in eſſa linea il diametro immobile del grafometro, il cui piano dev' eſſer convenientemente diſpoſto, e mettendo l' alidada mobile ſulla diviſione di 90°, vedrete il vertice *d* del triangolo *adb*. Supponghiamo che ciò ſucceda in *p*; egli è manifeſto che la linea *dp*, la quale miſurerete con una corda o teſa, ſarà l'altezza del triangolo *adb* di cui ſi dovrà miſurare la baſe *ab*. Supponghiamo che ſia trovata la baſe *ab* di 100 pertiche (la pertica è comunemente di 22 piedi; tuttavia eſſa è varia in varii paeſi. La lunghezza dell' arpento è dieci pertiche, e l'arpento quadrato vale 100 pertiche quadrate), e l'altezza *dp* di 40 pertiche; moltiplicherete la baſe per la metà dell' altezza; il prodotto darà 2000 pertiche quadrate o 20 arpenti; perchè l' arpento in ſuperficie vale 100 pertiche quadrate. Se il terreno (Fig. 44.) foſſe un parallelogra-

gramo A D C B, si moltiplicherà la base A B per l'altezza D P, ed avrassi la superficie cercata. In fatti abbiam detto essere la superficie di un parallelogramo uguale al prodotto della sua base per la sua altezza; talchè se la base A B è di 50 pertiche, e l'altezza D P di 40, la superficie sarà di 2000 pertiche quadrate, vale a dire di 20 arpenti. Per trovare l'altezza P D, basterà cercare quella del triangolo A D P ch'è la medesima.

Supposto il terreno, campo, prato, bosco, vigna ec. essere un rettangolo *abcd* (Fig. 42.) la cui base *ab* sia p. e. di 40 pertiche e l'altezza *ad* di 30; moltiplicando 40 per 30, il prodotto 1200 farà conoscere che la superficie cercata è di 1200 pertiche quadrate o di 12 arpenti.

Se il terreno è un quadrato *abdc* (Fig. 41.) il cui lato *cd* sia p. e. di 5 pertiche, si moltiplicherà *cd* per *ac*, o 5 pertiche per 5 pertiche, e troverassi essere la superficie di 25 pertiche quadrate che vagliono un quarto di arpento, sendo che l'arpento contiene 100 pertiche quadrate.

Se il terreno è un circolo (Fig. 27.) p. e. una pianura circolare di cui sia noto il diametro *bcg*, si cercherà (nel modo detto di sopra) la superficie del circolo medesimo. Se il diametro è p. e. di 14 pertiche, si farà la proporzione $7:22::14:x = 44$ pertiche, e così avrassi la circonferenza, la cui metà 22 moltiplicata essendo pel raggio 7 darà 154 pertiche quadrate, superficie cercata. Se non fos-
se

se possibile di misurare immediatamente il diametro; perchè inaccessibile il centro *c* coperto p. e. dall'acqua, si dovrà piantare de' travicelli in *a*, *m*, *b*, *n* ec. di modo che gli archi *am*, *mb*; ec. tener si possano come piccole rette linee; poi misurando tutti questi archi, la somma di quelle piccole misure darà sensibilmente la lunghezza della circonferenza. Supponghiamo che così operando siasi trovata la circonferenza di 44 pertiche, si troverà il diametro *bg* col fare questa regola di tre $22:7::44:x = 14$ pertiche. Moltiplicando la metà 22 della circonferenza pel raggio 7, il prodotto 145 darà a conoscere essere la cercata superficie di 154 pertiche quadrate. Tali operazioni sono fondate su ciò che abbiam detto di sopra (73) parlando del rapporto del diametro alla circonferenza.

OSSERVAZIONE. Abbiamo detto di sopra (73) che il rapporto approssimato del diametro alla circonferenza era quello stesso di $7:22$, o di $113:355$. A restarne convinti, si faccia così: Intorniate un cilindro retto *adnb* (Fig. 52) con una striscia di carta *MoNs*; se il diametro *ab* della base del cilindro è p. e. di 7 pollici, troverete esser la striscia di carta di 22 incirca. Se il diametro è di 113 linee la striscia di carta sarà presso a poco di 355 linee ec. Ora la lunghezza di tale striscia di carta rappresenta evidentemente quella della circonferenza del circolo il cui diametro è *ab*.

107. Se si dovesse misurare un poligono BAFDC (Fig. 34), si condurranno le dia-

go-

gonali A D, A C, per risolverlo in triangoli, poscia misurando ciascun triangolo come abbiamo spiegato (106), si sommeranno tutte queste misure onde avere la superficie totale del poligono.

108. Se fosse dato un terreno (Fig. 70.) A B C D P il quale fosse in una parte terminato da qualche linea curva B A P D, si condurranno delle linee A C, P C, di modo che le linee B A, A P, P D siano sensibilmente rette; ed allora misurando li triangoli A B C, A C P, P C D, e sommando insieme le superficie di questi triangoli, si avrà la superficie totale del terreno. Facilmente si vede la maniera da tenersi ne' casi più complicati.

109. Ma si può dare che levar debbasi il piano d' un terreno cui non sia possibile percorrere se non se all' intorno. Supponghiamo p. e. che la figura A F D C B (Fig. 34) rappresenti un paese paludoso, od un lago o un folto bosco a livello, tale che non si possa entrarvi dentro; fate piantare sulla sponda degli oggetti alquanto visibili, p. e. de' travicelli di modo che questi travicelli rappresentino gli angoli di un poligono. Misurate gli angoli C B A, B A F ec. formati dai lati del poligono, ed inoltre misurate li lati degli angoli medesimi. Ciò posto, fate sulla carta una figura *bafdc* simile alla figura B A F D C. Per far ciò formate per via del quadrante l' angolo *abc* uguale all' angolo A B C, e pigliate li lati *ba*, *bc* proporzionali a' lati B A, B C. Se p. e. il lato B A è di 500 tese, il lato B C

di

di 300, e vogliate far valere 100 tese ciascuna parte della scala *fg* (Fig. 65) altre volte accennata, piglierete la linea *ba* (Fig. 34) uguale a cinque divisioni della scala, e farete la linea *bc* di tre divisioni della scala medesima. Similmente farete l' angolo *baf* uguale all'angolo BAF, prendendo poi la linea *af* di altrettante parti della scala quante volte la linea AF contiene 100 tese. Se la linea AF fosse di 440 tese, come 40 sono li due quinti di cento, prenderete quattro divisioni e due quinti di una divisione per la linea *af*. Ma per avere li due quinti d' una divisione della scala, saria duopo fare le divisioni assai grande ed assai lunga la scala; poichè sarebbe allora agevol cosa di spartire una divisione in cinque parti uguali, e prendendone due si avrebbero li due quinti della divisione. Farete parimente l'angolo *f* uguale all'angolo F, e piglierete la linea *fd* proporzionale alla linea FD, come si è pigliato *ab* proporzionale alla linea AB. Facciasi ancora l' angolo *d* uguale all'angolo D, l'angolo *c* uguale all'angolo C, e piglisi il lato *dc* proporzionale al lato DC. Ciò posto, è manifesto che la figura *afdcb* sarà in picciolo ciò ch' è in grande la figura AFDCB; dunque la prima figura sarà rappresentativa del piano della seconda. Ora per avere la superficie della figura AFDCB, misurate quella della figura *afdcb*, il che sarà facile riducendola in triangoli per via delle diagonali *ad*, *ac*. Diffatti, abbassata che abbiate dal punto *b* la perpendicolare *bp* sulla

base

base *a c* del triangolo *a b c*, aprite il compasso da *b* in *p*, portate quest' apertura sulla scala suddetta, aprite ancora il compasso da *c* in *a* e portatene l'apertura sopra la scala medesima. Supponghiamo che la base *c a* corrisponda ad otto divisioni della scala, ciascuna delle quali vaglia 100 tese, voi concluderete che la diagonale A C vale 800 tese. Parimenti se la linea *b p* risponde a quattro divisioni della scala, concluderete che la corrispondente linea B P vale 400 tese. Per la qual cosa moltiplicando la base A C del triangolo A B C per la metà della sua altezza B P, cioè moltiplicando 800 tese per 200 tese, avrete 160000 tese quadrate per la superficie del triangolo medesimo; quindi il triangolo *a b c* rappresenterà una superficie di cento sessanta mille tese quadrate. Misurerete la superficie del triangolo *a c d* che rappresenta il triangolo A C D, e quella del triangolo *a f d* che rappresenta l' altro A F D: Supposto che abbiate trovata di cento mila tese quadrate la superficie del triangolo *c a d*, e di duecento mila quella del triangolo *a f d*, sommerete queste due quantità colla superficie dell' triangolo *a b c*, la somma 460 mille tese quadrate vi farà conoscere che la superficie del terreno B A F D C vale 460 mille tese quadrate.

110. OSSERVAZIONE. In pratica, volendo far uso di una scala *f g* (Fig. 65) per misurare o un terreno (Fig. 34), o la larghezza di un fiume (Fig. 67) o l' altezza d'una torre (Fig. 65) o quella di un monte (Fig. 68)

tor-

torna meglio l' adoperare lunghe scale divise in un grandissimo numero di parti come p. e. in 400 parti; e parimenti disegnare sulla carta figure grandi a rappresentar quelle che misurar dobbiamo sul terreno, facendo quant' è possibile in modo che ciascuna divisione della scala rappresenti una piccola misura di terreno, come p. e. 1, o 2 tese, ovvero anche un sol piede. Imperciocchè è manifesto, che se ciascuna divisione della scala rappresentando 10 tese, si prendesse errore di un decimo di tal divisione sulla scala, in tal caso l'error sarebbe di una tesa relativamente alla linea corrispondente sul terreno; ma se ciascuna divisione della scala non rappresentasse che un piede, l' error non sarebbe se non se di un decimo di piede, il che è pochissima cosa; l' error sarebbe di un decimo di pollice se ciascuna divisione della scala rappresentasse un pollice. Quindi quanto più piccole saranno le lunghezze rappresentate dalle divisioni della scala, tanto più saranno esatte le operazioni. Alle nostre Istituzioni Matematiche rimettiamo que' leggitori che più ampie nozioni bamassero intorno alla misura delle distanze de' luoghi, alla misura de' terreni, ec.

DEL

DELLA LIVELLAZIONE.

111. La *Livellazione* si è l'arte di trovare quanto è un luogo più o men lontano dal centro della terra, che un altro luogo dato. Concepiamo che il globo terrestre sia rappresentato dalla figura *aimn* (Fig. 12): e di fatti deesi considerar la terra come un globo perfetto, stante che li più alti monti così piccoli sono, per rispetto alla sua massa, che si possono riguardare come granelli di sabbia. Ciò posto, chiamo *linea orizzontale* una linea *gap*, tangente alla superficie della terra, la quale come ora abbiam detto, dev'esser riguardata come un globo; ed essendo che la distanza cui nella livellazione si osserva è sì piccola che la linea *ap* e l'arco corrispondente *ai* tener si ponno siccome uguali senz' error sensibile, noi supporremo l'arco *ai* uguale alla sua tangente *ap*.

Per livellare si potrà servirsi di un istrumento quale lo rappresenta la figura 71. E' desso una canna scavata, di lata o di altra materia piegata a guisa di gombito in *b* ed in *a*; incollansi in *m* ed *n* due cannelli di vetro *m* ed *n*; si riempie d'acqua la canna *ab*, finchè l'acqua (che giova colorare) s'innalzi ne' cannelli di vetro. La linea *mn* che rade la superficie dell'acqua è una linea orizzontale; sendo che la superficie dell' acqua è a livello, ossia ugualmente lontana dal centro della terra in ambi li cannelli di vetro. Ora eccovi come far uso di questo istrumento.

112. Problema. *Sia proposto di conoscere la differente altezza di due luoghi* F, *p* (Fig. 72).

Prendete un punto i non lontano da F più di 30 o 40 pertiche incirca. Collocate l'istrumento suddetto nel mezzo B di questa distanza, mirate, secondo la linea orizzontale formata dalla superficie dell'acqua ne'due rami dell'istrumento, a due travicelli o bastoni da livello piantati in F ed i, e fate segnare gli osservati punti g e K. Misurate esattamente le altezze i K, Fg, sottraete la minore dalla maggiore, resterà evidentemente l'altezza i K $-$ Fg $= i$K $-$ Kx $= ix$ per la differenza di livello del punto F e del punto i. Supposto che la distanza di i a p non ecceda 30 o 40 pertiche, collocate il vostro istrumento al mezzo in n, e mirando li bastoni iK, pm, misurate le altezze pm, id; levando via la minore dalla maggiore, avrete la differenza ps di livello tra il punto p e il punto i. Supponendo ps di due tese, ix di una tesa e cinque piedi, la differenza di livello del punto F e del punto p sarà di 3 tese 5 piedi, vale a dire, che il punto p sarà più basso che il punto F di 3 tese 5 piedi. Quando fosse il punto p più lontano ancora dal punto F si dovrebbe allo stesso modo continuare l'operazione.

OSSERVAZIONE I. Per misurare l'altezza pm si può avere un circolo bianco, mobile lungo il travicello pm per mezzo di un bastone cui stasse attaccato. Si stabilisca poi il bastone al travicello pm per via di una vite, alloraquando il circolo bianco sarà all'osservata altezza m.

OSSERVAZIONE II. Per condurre un'acqua da F in p è necessario che il punto p sia più basso

del

del punto F, stante che l'acqua tende mai sempre a discendere; perciò se il punto F fosse più basso del punto p, saria inutile la spesa per condurre l'acqua da F in p.

OSSERVAZIONE III. Le linee is, gK essendo poco notabili, possiam riguardarle come archi della circonferenza di un gran circolo della terra, e la differenza di livello tra li punti F e p uguale alla differenza delle distanze di questi punti dal centro della terra.

OSSERVAZIONE IV. Coloro che non hanno intenzione di leggere la nostra Fisica, lascino pure da parte quanto segue.

DELLE CURVE.

* 1. E' nostro intendimento di dare in questo luogo a principianti una qualche idea delle proprietà delle curve, delle quali avendo già a lungo trattato nelle nostre Istituzioni Matematiche, e più ampiamente ancora nel nostro Corso completo di Matematiche, vogliamo soltanto mettere li giovinetti, che non hanno il comodo di consacrare un certo tempo allo studio di questa bella parte della Geometria, in istato d'intendere la nostra Fisica che abbiam risolto di pubblicare fra non molto, e cui questo libretto servir potrà d'introduzione.

* 2. Abbiam veduto nella geometria (n.° 48) che una perpendicolare fc (Fig. 32) abbassata da un punto qualunque della circonferenza d'un circolo sul diametro ab era media proporzionale tra le due parti ac, cb del diametro.

Chiamasi da Geometri *ordinata* cotesta linea fc abbassata perpendicolarmente sopra la linea ab, da essi pure nominata linea delle *ascisse*. Ora le ascisse di un circolo si contano d'ordinario o dall'estremità a del diametro, o dal centro p. Per ispiegarci più chiaro, supponghiamo il diametro $ab = 2a$, e per conseguenza il raggio ap, o $pb = a$, l'ordinata $fc = y$, l'ascissa $ac = x$, l'altra ascissa bc sarà $= ab - ac = 2a - x$. Ora essendo l'ordinata fc media proporzionale tra le due parti del diametro, avremo la proporzione $ac : fc :: fc : cb$, ovvero algebraicamente $x : y :: y : 2a - x$. Ma in ogni proporzione geometrica il prodotto degli estremi è uguale a quello de' medj; perciò avremo l'equazione $y^2 = x \times (2a - x)$, ossia $y^2 = 2ax - x^2$. E' questa l'equazione che esprime la natura del circolo, e che fa conoscere che *in ogni curva il quadrato dell'ordinata è sempre uguale al prodotto delle ascisse*. Volendosi contare le x dal centro p, facendo $cp = x$ si avrebbe $bc = a + x$, ed $ac = ap - cp = a - x$; di modo che la proporzione $ac : fc :: fc : cb$ darebbe $a - x : y :: y : a + x$, dalla quale si ricaverebbe $y^2 = (a - x) \times (a + x)$ ovvero $y^2 = a^2 - x^2$ altra equazione al circolo: ma in questa l'ascissa ossia *tagliata* x parte dal centro, mentre che nella prima era contata dalla sommità a fino al concorso dell'ordinata. Suppongasi valere il raggio ab 5 piedi, e l'ascissa cp 3 piedi, a^2 sarà uguale a 25 ed $x^2 = 9$; sicchè avremo $y^2 = 25 - 9 = 16$, ed $y = \pm\sqrt{16} = \pm 4$. Quindi l'ordinata fc sarà di 4 piedi.

* Per

* Per sapere cosa significhi quel doppio segno $\pm$, basta solo il tornar colla memoria a quanto abbiamo detto nel calcolo (n.° 29) intorno le radicali, e sarà agevole l' intendere che la radice positiva $+4$ supposta essendo indicare l'ordinata fc, che in tal caso deesi riguardare come positiva, la radice negativa -4 esprimerà l'ordinata cg; di modo che nel circolo a ciascuna ascissa pc rispondono due ordinate uguali, l'una positiva cf, l'altra negativa cg. Per lo più le ordinate negative sono quelle che stanno di sotto della linea delle ascisse, e le ordinate positive stanno di sopra. E' manifesto che conoscendo il raggio a e l'ascissa x, si potrà conoscere l'ordinata y; di modo che l'equazione $y^2 = a^2 - x^2$, o pigliando le radici, l'equazione $y = \pm\sqrt{(a^2 - x^2)}$ farà conoscere ciascuna doppia ordinata fg. Così pur se sopra ciascun punto c del diametro sarà innalzata la perpendicolare fc, il cui valore sarà stato calcolato dall' equazione antecedente dopo aver misurata l'ascissa $pc = x$, si prolunghi fc, finchè $cg = cf$, e facciasi passare una curva per tutti li punti f, g; ec. Di questo modo determinate, avremo un circolo tanto più esatto quanto le ascisse FC, fc ec. saranno state prese più vicine l'une alle altre. Se accade che la quantità $a^2 - x^2$ non formi punto un quadrato numerico perfetto, se ne cercherà la radice quadrata prendendo assai decimali acciò l'errore non possa esser sensibile. Trattandosi di un numero esprimente piedi, potremo contentarci de' millesimi senza andare più avanti.

* 3 *Parabola* si appella una linea curva M A m (Fig. 73) in cui il quadrato di ciascuna ordinata $mP = y$ è uguale al prodotto dell' ascissa $AP = x$ pel *Parametro*, ch' è una linea costante cui nomineremo p; perciò nella curva suddetta si trova sempre $y^2 = p.x$. La linea p è sempre quadrupla della distanza dal vertice A della parabola al punto fisso F preso sull' asse, che foco si appella. Supposto adunque la parte A F dell'asse essere di un piede, p varrà 4 piedi.

* Dall'equazione $y^2 = px$ si deduce $p:y::y:x$ perocchè questa proporzione restituisce l'equazione $y^2 = px$; vale a dire, che l'ordinata è media proporzionale tra il parametro (che sempre si tiene come noto) e l'ascissa A P che può essere misurata. E poichè (Geom. n. 49) facilmente si trova una linea media proporzionale tra due linee date, o tra le linee p ed x, si potrà trovare facilmente il valore dell'ordinata y per ciascuna ascissa A P; ed innalzando sopra ciascun punto P dell'asse, l'ordinata P m, e facendo passare una linea curva per tutti li punti m così trovati, si descriverà il ramo A m. Avrassi il ramo A M col fare il prolungamento di ciascuna ordinata m P uguale all' ordinata, ossia prendendo $PM = Pm$. Diffatti l'equazione $y^2 = px$, dà $y = \pm \sqrt{px}$; vale a dire, che a ciascuna ascissa A P rispondono due ordinate uguali, l'una positiva P m, l'altra negativa P M. Supposta l'ascissa $AP = x$ positiva andando dalla parte di C, l'ascissa A f che si prendesse andando dal lato opposto, sareb-

rebbe negativa (vedi ciò che abbiamo detto sulla natura delle quantità, calcolo n.° 21) e le si darebbe il segno − per aver l'equazione $y^2 = p X - x = -p x$, da cui si ricava $y = \pm \sqrt{(-p x)}$, quantità immaginaria la quale dimostra, che immaginarie essendo le ordinate che risponderebbero alla parte dell' asse che fosse prolungato dal lato di f, la curva non istendesi punto da quella parte.

* La ordinata che passasse pel foco F sarebbe uguale alla metà del parametro; perocchè se si fa $p = 4a$, A F od x sarà $= a$, ed $y^2 = p x$ sarà $= 4aa$. Laonde avremo $y = \sqrt{(4aa)} = 2a = \frac{p}{2}$. Siccome l'ascissa x può crescere all' infinito, la parabola si estende all'infinito dalla parte di C.

* 4. Se si piglia $Af = AF$, e si alzi la perpendicolare indefinita fd, questa linea detta la *Direttrice* ha tale proprietà che ogni punto m della parabola è tanto lontano dal foco quanto la direttrice, cosicchè le linee Fm, md sono sempre uguali, a cagione di md perpendicolare alla direttrice.

* 5. Una linea mt che tocca la parabola senza tagliarla, si chiama *tangente* della parabola. Similmente la linea A N perpendicolare all'estremità A dell'asse A C è una tangente. Dicesi *sottangente* la parte Pt dell'asse (prolungato s' è necessario) compreso tra l'ordinata corrispondente Pm, ed il punto ove la tangente concorre col prolungamento dell'asse. Nella parabola questa sottangente è sempre

 dop-

doppia dell' ascissa; vale a dire, che P $t = 2x = 2$. AP. Per la qual cosa se dal punto m della curva abbassasi la ordinata mP, e si prende At = AP, la linea tm condotta da t in m sarà una tangente. Se si conduce la linea mC perpendicolare alla tangente mt fino ad incontrar l' asse in C, questa linea sarà detta *normale*, e la parte CP dell' asse compresa tra la normale e l' ordinata appellasi *sunnormale*. Ora dicesi da Geometri che nella parabola *la sunnormale è uguale alla metà del parametro*.

* *6.* Una linea mo parallela all' asse nominasi *diametro*, ed il parametro di tale diametro è una linea quadrupla della distanza md che v' ha tra l' origine m del diametro e la direttrice. Se si conduce la tangente mt (Fig. 74), il diametro indefinito mb, e la linea ls parallela alla tangente, sarà essa tagliata dal diametro in due parti uguali in o, e le linee lo, os saranno tante ordinate al diametro di cui le ascisse mo possono contarsi dal vertice m del diametro medesimo. Se faremo il parametro di questo diametro uguale a P, l' ascissa mo = X, l' ordinata = Y avrassi l' equazione $Y^2 = PX$, d' onde si ricava $P : Y :: Y : X$, ed $Y = \pm \sqrt{PX}$. Lo che ci farebbe conoscere, se già nol sapessimo, che a ciascuna ascissa X corrispondono due ordinate uguali, l' una positiva lo, l' altra negativa ls. Se nominiamo due ordinate all' asse l' una y l' altra t, l' ascissa corrispondente alla prima, essendo indicata per x, e l' ascissa corrispondente alla seconda, essendo disegnata per z, avremo le due equazioni $y^2 = px$, e $t^2 = pz$; quindi $y^2 : t^2 ::$

px

$px:pz$. Ma dividendo li termini della seconda ragione per la stessa quantità p, essa resta la stessa; imperocchè dividendo li termini della ragione 20:10 per la stessa quantità 5, la ragion 4:2 avrà lo stesso valore che quella di 20:10; laondè si potrà dire che $y^2:t^2::x:z$, lo che fa vedere che *li quadrati delle ordinate sono tra loro come le ascisse corrispondenti*, e la proprietà medesima ha luogo trattandosi delle ordinate ai diametri della parabola.

* Ha questa curva molte altre proprietà. Si sa essere lo spazio parabolico P*m*A (Fig. 73) li due terzi del parallelogramo AN*m*P di ugual base ed uguale altezza; essere il solido che generato venisse dalla curva MA*m* girando intorno dell' asse AP, la metà di un cilindro della stessa base e della medesima altezza, ec.

* Faremo vedere nella Fisica che li corpi slanciati obbliquamente in aria, descrivono una parabola, almeno facendo astrazione dalla resistenza dell' aria medesima. Questa teoria trovasi pienamente sviluppata nelle nostre Istituzioni Matematiche al proposito del getto delle bombe.

* 7. Attaccate le due estremità di un filo alli punti F, ed *f* (Fig. 75) e tenendo sempre teso questo filo per via d' uno stiletto la cui punta stia appoggiata sulla carta, fate girare lo stiletto da B in *a*, poi da *a* in *b*, da *b* in A, e da A in B, esso descriverà una curva B*ab*A che li Geometri dicono *elisse*. Li punti F ed *f* ne sono li *fochi* A*a*, il *maggior asse*, la linea B*b* perpendicolare al maggior asse, e che gli passa per mezzo ne è il minor asse, MP

è un'

è un'ordinata, $CP = x$ è un'ascissa contata dal centro; ed allora facendo $Aa = 2a$, Ca o $CA = a$, $PM = y$, $CB = Cb = b$, si ha l'equazione $y^2 = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$. Ma se si fa $aP = x$, e per conseguente $PA = 2a - x$, l'equazione sarà $y^2 = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$.

* 8. La superficie dell'elisse è uguale a quella di un circolo il cui raggio fosse medio proporzionale geometrico tra il semi maggior asse ed il minor semi asse; talchè se il primo semi maggior asse si supponga di 8 pollici, il semi minor asse di 2 pollici, il circolo il cui raggio fosse di 4 pollici avrà una superficie uguale a quella dell'elisse. Si si concepisca girar l'elisse attorno del suo maggior asse così, che ella generi un solido detto *elissoide*, questo solido sarà li $\frac{2}{3}$ di un cilindro il quale avesse il maggior asse per altezza, e di cui il raggio della base fosse uguale alla metà del minor asse.

* 9. Sopra una linea indefinita Fq (Fig 76) piglinsi due punti fissi F, f cui appelleremo *fochi*; due altri punti A, a che nomineremo li *vertici* del primo asse dell'iperbola; chiamando secondo asse una linea Bb che passa per lo mezzo C del primo asse tagliando perpendicolarmente questo asse, e la cui lunghezza si determina prendendo la distanza $Cf = CF$ con un compasso, e portando l'apertura da a in B e b sulla linea Bb. Facciasi $aC = CA = a$, $CB = Cb = b$, $CP = x$, $aP = CP - Ca = x - a$,

mP

$mP = MP = y$, la curva Mam, nella quale abbiamo $y^2 = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, appellasi iperbola. In questa curva possiam prendere le ascisse positive o negative a piacere, perchè il quadrato di $+x$, e quello di $-x$ sono uguali ciascuno ad x^2 o $+x^2$. Per la qual cosa supposto che le ascisse CP prese alla destra del punto C siano positive, quelle della sinistra Cp saranno negative, e supposto $Cp = CP$, l'ordinata Dp sarà uguale all'ordinata mP; sicchè la curva avrà quattro rami uguali, due da ciascuna parte del punto C che si chiama *centro dell' iperbole*, due dal lato delle ordinate positive pD, Pm, e due dal lato delle ordinate negative pd, PM. Ma se si suppone $x < a$, o $x < Ca$ o CA, la quantità $xx - aa$ sarà negativa del pari che il valore di yy, e si avrà $y = \pm \frac{b}{a}(xx - aa)$, quantità che sarà in tal caso immaginaria. Perciò non havvi alcuna ordinata reale tra C ed A, o tra C ed a. Allorchè gli assi sono uguali b è $= a$, e $\frac{bb}{aa} = \frac{aa}{aa} = 1$; in tal caso l' iperbola è detta *equilatera*, e la sua equazione è $y^2 = \frac{aa}{aa}(xx - aa) = 1.(x^2 - a^2)$ o $y^2 = xx - aa$.

* Se si conduce dal punto a (Fig. 77) una linea Yg parallela ed uguale al secondo asse Bb, e se dalli punti Y e g e dal centro C si tirano le linee Cf, Cu, nominate *assintoti*, e le linee aK, dM parallele all'assintoto Cg, l'iperbola ha queste notabili proprietà, 1.° che

CK

CK $= a$K: 2.° che facendo la linea aK $= c$, CM $= x$, dM $= y$, si ha sempre $xy = cc$, o $xy = c^2$, o $y = \frac{cc}{x}$. Ma l' ascissa CM $= x$ potendo crescere in infinito, l'ordinata $y = \frac{cc}{x}$ può diventare infinitamente piccola; per questa ragione la curva s' accosta sempre al suo assintoto, ed in infinito essa n'è infinitamente poco lontana; ma ciononostante non lo tocca punto, perchè $\frac{cc}{x} = y$ non è mai $= 0$. In generale, *l'assintoto di una curva è una linea che si avvicina ad essa curva, di modo che in infinito la distanza tra l'assintoto e la curva è sempre minore di ogn'altra quantità data.* Nell'iperbola supposto il punto M infinitamente lontano, lo spazio CadM in infinito, compreso tra il semi asse Ca, la curva e l'assintoto è infinitamente grande, come ne convengono li Geometri. Nell'iperbola, elisse e parabola chiamasi *raggio vettore* qualunque linea condotta dal foco F od f alla curva. Sonovi due fochi nell'elisse, e nell'iperbola, ma nella parabola ve n'ha un solo. La linea dD che passa pel centro C e termina alle iperbole opposte ad, AD appellasi *diametro*.

* 10. Sia la curva NCTQGSHX (Fig. 78) della quale Ac è l'assintoto, cui la curva s'avvicina infinitamente in infinito. Possiamo supporre che lo spazio cACN compreso tra l'ascissa AC, l'assintoto Ac e la curva in infinito, è infinito come lo spazio compreso tra l'iperbola ed il suo assintoto. Le ordinate

nate situate di sopra dell'asse come PQ, YX sono positive; e le ordinate situate di sotto dell'asse come DT, RS essendo negative, le ascisse AM, AC, AP, ec. che vanno dalla parte della destra sono positive, e quelle che vanno dalla parte della sinistra, come A*a* sono negative, ed appartengono alla parte *a k* della curva che dev' esser uguale alla parte *n* CTQGHX situata alla destra del punto A. Pongasi mente a questa curva che nomineremo *curva delle forze fisiche*, perchè proveremo nella Fisica che le sue ordinate rappresentar possono le forze con cui due punti di materia agiscono l'uno sull'altro.

* 11. Chiamansi da Geometri *curve geometriche* o *curve algebriche* quelle, la cui natura può essere espressa da una equazione algebrica contenente il rapporto che passa tra le ordinate e le ascisse; tali sono la parabola, l'elisse, ec. Ma se una curva è descritta sopra un piano da una legge costante senza potersi esprimere algebricamente il rapporto che v' ha tra le ordinate e le ascisse, la chiamano *trascendente*, o *meccanica*.

* La cicloide è una curva trascendente CBD (Fig. 79) descritta dal moto di un punto *f* della circonferenza di un circolo, mentre che il circolo il cui punto *f* si trova in C al principio del moto, si applica di mano in mano su tutti li punti della base AD, che per conseguenza è uguale alla circonferenza del circolo generatore. In questa curva la linea M*f* che nomineremo *y* è sempre uguale all' arco

BM

BM corrispondente; di modo che se si fa quest' arco $= x$, si avrà $y = x$. Ma MP è il seno dell' arco RM o del suo supplemento BM (vedi la geometria n.° 90, e la nota dello stesso numero); quindi facendo $Pf = Y$, si avrà $Y = x + \text{sen}.x$; vale a dire, che l' ordinata Pf è uguale all'arco BM più il suo seno. Ma non è possibile di determinare algebricamente il rapporto del seno all'arco; perciò l' equazione $Y = x + \text{sen}.x$ è trascendente e non algebrica.

* Eccovi le principali proprietà della cicloide; la tangente ft è sempre parallela alla corda corrispondente BM del circolo generatore; la lunghezza dell' arco cicloidale Bf è doppia della stessa corda BM, la lunghezza della cicloide intera è quadrupla del diametro BR del circolo generatore, lo spazio CBDC compreso tra la cicloide e la sua base è triplo della superficie del circolo generatore. Se (Fig. 80) un corpo qualunque spinto a cagione della gravità, parte dal punto A o dal punto C di una cicloide rovesciata, esso arriverà al punto B in uno stesso tempo nè più nè meno; vale a dire, che gli archi di una cicloide rovesciata sono descritti nel tempo stesso tutto che siano inuguali. Di che n' è la ragione che allora quando il mobile parte dal punto A, essendo l'arco AC più perpendicolare all' orizzonte, il corpo accelera dapprima siffattamente il suo moto che la velocità ch' esso acquista compensa la lunghezza dello spazio che dee percorrere; ma esso accelera meno il suo

moto

moto partendo dal punto C; laonde mette altrettanto tempo a pervenire in B, allorchè parte da A quanto allorchè parte da C: Finalmente se un corpo dee discendere da A in B per l'azione della causa della gravità, arriverà esso a tal punto nel minimo tempo possibile, se descrive la semicicloide AB. Perciò li geometri dicono essere la cicloide la curva di più veloce discesa. Dicono ancora che la *cicloide è tautocrona*; vale a dire, che li suoi archi maggiori e minori descritti vengono nel tempo medesimo; ma prescindono dalla resistenza dell'aria cui in tal caso non pensano.

FINE.

TA-

TAVOLA

Delle Materie contenute in questo Volume.

COMPENDIO DI MATEMATICHE.

Fine della Tavola

Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 28.
Fig 34.
Fig. 33.
Fig. 41.
Fig 42.
Fig. 44.

Fig. 75.
B
C
P
F
A
b
Fig. 76.
B
D
m
C
F
p
A
a
P
f
q
d
b
M
Fig. 78.
F
X
V
R
r
B
f
S
s
Y
G
H
Fig. 80.
A
R
D
M
P
C
p
B
D